



Regulae multiplicationis v abacistických textech Gerberta z Remeše, Abbona z Fleury, Herigera z Lobbes a Bernelia z Paříže

Marek Otisk, FF OU v Ostravě, FÚ AV ČR, Praha

Abstrakt: Tato studie se věnuje výkladu násobení podle čtyř nejstarších latinských středověkých autorů, kteří sepsali své texty o početních úkonech na abaku kolem roku 1000, tedy podle Gerberta z Remeše (*Pravidla pro počítání na abaku, Regulae de numerorum abaci rationibus*), Herigera z Lobbes (*Pravidla počítání na abaku, Regulae numerorum super abacum*), Abbona z Fleury (*Komentář k Victoriově spisu Calculus, In Calculum Victorii commentario*; resp. tzv. *Abbonův abakus, Abbonis abacus*) a Bernelia mladšího z Paříže (*Kniha o abaku, Liber abaci*). Po představení, vysvětlení a srovnání pravidel pro násobení podle těchto spisů následuje v příloze originální znění a překlad Herigerových, Gerbetových a Abbonových pravidel pro násobení.

Abstract: This paper deals with the interpretation of multiplication according to four oldest medieval Latin authors of mathematical texts about the counting board or abacus written around year 1000, i.e. according to Gerbert of Reims (*Rules for computation on the abacus, Regulae de numerorum abaci rationibus*), Heriger of Lobbes (*Rules for computation on the abacus, Regulae numerorum super abacum*), Abbo of Fleury (*Commentary on the Calculus of Victorius, In Calculum Victorii commentario*; respectively so called *The Abbon's abacus, Abbonis abacus*) and Bernelius Junior of Paris (*Book on the abacus, Liber Abaci*). After the presentation, explanation and comparison of rules for multiplication contained in these writings, follows the original text and translation Heriger's, Gerbert's and Abbon's rules for multiplication in appendices.

Klíčová slova: abakus; násobení; *quadrivium*; Heriger z Lobbes; Gerbert z Remeše; Abbo z Fleury; Bernelius mladší z Paříže

Keywords: abacus; multiplication; *quadrivium*; Heriger of Lobbes; Gerbert of Rheims; Abbo of Fleury; Bernelius Junior of Paris

Úvod

Císař Otta III. obdržel ve druhé polovině 90. let 10. století od Gerberta z Remeše dopis s přáním, aby se dožil takového věku, jaké je nejvyšší číslo, které lze vyjádřit na abaku.¹ Tímto číslem měl autor nevšedního vzkazu na mysli 999 999 999 999 999 999 999 999 999, což je nejvyšší hodnota, kterou může raně středověký abakus, mající 27 sloupců čili řádů celých čísel, svému uživateli nabídnout. Byla-li by abacistická tabulka, kterou užívali učenci kolem roku 1000, větší, mohlo by být i samotné nejvyšší číslo vyšší. Právě na období před rokem 1000 (a těsně po tomto roce) se zaměří tato studie, která představí texty čtyř vybraných dobových matematiků, u nichž známe nejen jejich jména, ale také dokážeme identifikovat jejich pojednání o početních úkonech na abaku.

V prvé řadě se jedná o papeže Silvestra II., který ještě jako remešský učitel Gerbert sepsal nejstarší ucelený nám dochovaný středověký návod pro abacistické výpočty (*Regulae de numerorum abaci rationibus*), který spolu s dopisy jeho příteli Konstantinovi z Fleury dal základ pro vznik dalších pojednání na toto téma, včetně komentářů a dalších doplnění. U některých z těchto textů známe jejich autory a ve všech případech se jedná o učence, kteří mohli být s Gerbertem v přímém kontaktu. V případě Herigera z Lobbes (*Regulae numerorum super abacum a Ratio numerorum abaci*) a Bernelia mladšího z Paříže (*Liber abaci*) se jedná o přímé či nepřímé Gerbertovy žáky, kteří se ke svému učiteli hlásili i ve svých pojednáních. U Abbona z Fleury platí, že se s Gerbertem také osobně znal, ovšem v mnoha ohledech se jednalo o rivaly, kteří stáli na protivných pozicích. Přesto i Abbo, tj. *abaci doctor*,² znal početní úkony na abaku (*In calculum Victorii commentario*) a dochovalo se i vyobrazení samotné početní tabulky nadepsané jeho jménem (tzv. *Abbonis abacus*). Všechny tyto texty zřejmě vznikly během jednoho čtvrtstoletí, tedy v relativně krátkém období mezi lety 980–1005, a vytváří základ (spolu s dalšími, vesměs anonymními traktáty, glosami a komentáři) souboru abacistických sbírek, jak jsou dochovány v rukopisech.³

Dnes můžeme poměrně věrně rekonstruovat základní obsahové složky nejstarších středověkých latinských abacistických pojednání: 1. popis abaku a uvedení základní terminologie, jíž se při práci na abaku užívá; 2. pravidla pro násobení; 3. pravidla pro dělení a konečně 4. rozbor početních úkonů se zlomky. Z pera uvedených autorů (u traktátů, které se podařilo autorsky identifikovat) se dochoval úplný popis všech čtyř částí vlastně jen od Bernelia. V případě Gerberta i Herigera chybí popis či vyobrazení abaku a práce se zlomky, u Abbona zase nejsou dochovány např. pravidla pro dělení. Je to tedy pouze násobení, o němž pojedná-

¹ Gerbertus Remensis. *Epistola* 183. In Gerbert von Reims. *Die Briefsammlung Gerberts von Reims*. Ed. Weigle, F. MGH BDK. T. 2. Weimar: Hermann Bohlaus Nachfolger, 1966, s. 217: „*Extremus numerorum abaci vestrum definiat.*“

² Tímto označením končí jeden z dochovaných rukopisů Abbonova komentáře k Victoriovu spisu – Abbo of Fleury and Ramsey. *Commentary on the Calculus of Victorius of Aquitaine*. Ed. Peden, A. M. Oxford: Oxford University Press, 2003 [dále citováno jako Abbo, *In Calc.*], s. xxxviii: „*Nunc manibus fer aquas quia sat iam sumpsimus / Qui serit in lacrimis, recipit hic gaudia messis / His abbas abaci doctor dat se Abbo quieti.*“ Srov. také *Excerpta ex Abbonis scolastici Floriacensis in calculum Victorii commentario*. Ed. Bubnov, N. In: *Gerberti postea Silvestri II papae Opera Mathematica (972–1003)*. Berlin: R. Friedländer & Sohn, 1899 (repr. Hildesheim: Georg Olms, 1963), s. 203.

³ Ilustrativním příkladem je oxfordský rukopis St. Johns's College MS 17 z počátku 12. století, který zahrnuje především komputistické texty, ovšem nechybí v něm souhrn abacistických pojednání (f. 41v–58r) – elektronickou podobu rukopisu viz <http://digital.library.mcgill.ca/ms-17/>. O rekonstrukci nejstarších podob abacistických kodexů (zahrnující spisy Gerberta, Herigera a anonymních komentářů) viz *Gerberti postea Silvestri II papae Opera Mathematica*, s. 294–296. Srov. také Evans, G. R. Schools and scholars: the study of the abacus in English Schools c. 980–c. 1150. *The English Historical Review*, vol. 94, no. 370 (1979), s. 71–89 nebo Burnett, Ch. The Abacus at Echternach in ca. 1000 A.D. *SCIAMVS*, vol. 3 (2002), s. 91–108.

vali všichni čtyři jmenovaní autoři v nám dnes známých textech, což je zároveň důvod, proč jsou právě pravidla pro násobení hlavním předmětem zájmu této studie.

Po stručném představení autorů abacistických textů budou předvedeny vlastní poněkud jednotvárné a na první pohled málo srozumitelné regule pro násobení, jak je prezentovali tvůrci těchto pojednání, dojde k jejich srovnání a v některých případech bude učiněn pokus o vysvětlení jejich dochované podoby. Samotnému výčtu těchto regulí bude předcházet vysvětlení základních pojmů, jimiž se pravidla pro násobení vyznačují (*digitus* a *articulus*), následně se již pozornost zaměří na samotné násobení na abaku, tzn. bude vyložen postup, který měl uživatel daných pravidel dodržovat, chtěl-li skutečně na abaku násobit.

Neboť abacistické výpočty nebyly určeny pouze pro vědecké či matematické účely (mnohé aritmetické operace mohl raně středověký počtář snadněji a rychleji provést v hlavě nebo s pomocí počítání na prstech⁴), ale měly za úkol také pobavit toho, kdo počítá,⁵ chce tento článek především představit podobu nejstarších latinských středověkých abacistických textů, poukázat na rozdíly, jež se v nich nacházejí a ukázat, jak probíhal samotný početní úkon – tedy zábava každého počítání milovného vzdělance.

Abacisté

Dnes již panuje všeobecná shoda, že to byla poslední čtvrtina 10. století, kdy se v latinské středověké Evropě počíná znovu užívat matematická pomůcka v podobě abaku. Zásadou encyklopedického díla Martiana Capella *De nuptiis Philologiae et Mercurii* byla raně středověkým učencům známá římská podoba deskového abaku,⁶ na níž se počítalo pomocí kamének (tzv. *calculi*). Na sklonku 10. století je abakus rovněž velkou počítací deskou či tabulí, ovšem k počítání se začíná používat symbolů čísel (tzv. *apices* nebo *carateres*). Rozšíření této formy abaku v tehdejších středověkých klášterních školách lze relativně bezpečně klást do souvislosti s Gerbertovým pedagogickým působením v Remeši. Odtud se následně rozšířil především do lotrinských škol,⁷ ale také do Fleury (příp. Paříže), na Britské ostrovy či k Bodamskému jezeru (Reichenau) a také i jinde. Jistě ne náhodou celá řada abacistů a matematiků rané scholastiky explicitně zmiňuje Gerbertovo jméno jako prvopočátek užívání nové podoby abaku v latinské Evropě,⁸ objevuje se rovněž pojmenování abacistů termínem „gerbercisté“⁹ a v rukopisně dochovaných vyobrazeních nejstarších latinských středověkých abaků nechybí odkaz na Gerbertovo jméno.¹⁰

⁴ Srov. např. Brown, N. M. *The Abacus and the Cross. The Story of the Pope Who Brought the Light of Science to the Dark Ages*. New York: Basic Books, 2010, s. 81; nebo Burnett, Ch. *The Abacus at Echternach*, s. 92.

⁵ Viz Evans, G. R. *Schools and scholars: the study of the abacus*, s. 71.

⁶ Viz např. Martianus Capella. *De nuptiis Philologiae et Mercurii* VI, 579. Ed. Willis. J. Leipzig: Teubner, 1970, s. 203.

⁷ Srov. např. Bernelin, élève de Gerbert d'Aurillac. *Libre d'Abaque*, praef. Ed. Bakhouché. B. Pau: Princi Néguer, 1999 [dále citováno jako Bernelius, *LA*], s. 16.

⁸ Viz např. Bernelius, *LA*, praef., s. 16–18 nebo Radulphus Laudunensis. *Liber de abaco*. Ed. Nagl. A. In týž. *Die arithmetische traktat der Radulf von Laon. Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik* vol. 5 (1890), s. 100. Ve 12. století pak Vilém z Malmesbury říká naprosto jasně, že Gerbert byl prvním, kdo přinesl abakus od Saracénů – viz William of Malmesbury. *Gesta regum Anglorum – The History of the English Kings* II, 167, 3. Ed. Mynors, R. A. B. Oxford: Clarendon Press, 1998, s. 280: „*Abacum certe primus a Saracenis rapiens, regulas dedit quae a sudantibus abacistis uix intelliguntur.*“

⁹ Viz *Gerberti postea Silvestri II papae Opera Mathematica*, s. 291.

¹⁰ Srov. např. Folkerts, M. *Frühe Darstellungen des Gerbertschen Abakus*. In Franci, R. – Pagli, P. – Rigatelli, L. T. (eds.). *Itinera mathematica. Studi in onore di Gino Arrighi per il suo 90° compleanno*. Siena: Univesità di Siena, 1996, s. 30–33.

Na počátku užívání nové podoby abaku tak pravděpodobně stojí Gerbert,¹¹ rodák z Akvitánie, původně snad oblát prostého původu kláštera svatého Geralda v Aurillacu, který na konci 60. let 10. století strávil přibližně 3 roky za Pyrenejemi, kde podle dochovaných pramenů studoval *mathésis* (tj. umění *quadrivia*). Na počátku 70. let se dostal do Říma, kde svými matematickými znalostmi zaujal císaře Ottu I. a poté již zamířil do Remeše, kde se stal jednou z vůdčích osobností tamního intelektuálního prostředí. Na počátku 80. let byl z popudu císaře Otty II. jmenován opatem v klášteře v Bobbiu, načež se z Apeninského poloostrova poměrně rychle vrátil do Remeše, kde se výrazně angažoval v řadě politických sporů, včetně osobního zapojení do svárů o zdejší arcibiskupský stolec (dlouhá léta se tituloval jako opat z Bobbia a arcibiskup z Remeše, přestože římská kurie ho za remešského arcibiskupa nikdy neuznala). V průběhu 90. let se dostává do kontaktu s císařem Ottou III., který výrazně napomohl řešení arcibiskupského sporu v Remeši, když se zásadně zasloužil o Gerbertovo jmenování arcibiskupem v Ravenně. Nedlouho nato (opětovně s přispěním Otty III.) se roku 999 Gerbert stal papežem (jako Silvestr II.), kterýžto úřad zastával až do své smrti 12. 5. 1003.¹²

Také o životních osudech Abbona z Fleury jsme informováni poměrně velmi dobře. I tento rodák z okolí Orléans byl prostého původu a od útlého věku pobýval v klášteře svatého Benedikta ve Fleury, kde posléze stál v čele zdejší klášterní školy. Ještě předtím prošel několika vzdělávacích center (Paříž, Remeš) a proslavil se především jako znalec logiky (dialektiky) a komputistiky. Ve druhé polovině 80. let pedagogicky působil v Anglii, na ostrově Ramsey v severní části hrabství Cambridge, nedaleko města Huntingdon, kde vyučoval svobodná umění v tamním čerstvě založeném klášteře. Po návratu na kontinent se stal představeným svého domovského kláštera nad řekou Loirou a vlastně po celou dobu vykonávání opatské funkce (až do své násilné smrti 13. 11. 1004) se snažil o přímou supremaci Říma nad svou klášterní komunitou.¹³

Rovněž Heriger stál v čele monastické společnosti, v jeho případě to bylo na břehu řeky Sambry v klášteře svatého Petra v henegavském městečku Lobbes. O jeho životě se dochovalo značně méně informací, takže v mnohém nezbyvá než spekulovat. Je známo, že působil jako student v katedrální škole v Lutychu, s níž i v dalších letech udržoval velmi četné kontakty, a následně (konec 50. let?) se stal mnichem v Lobbes, kde poté vedl tamní školu (od

¹¹ Odlišný, i když kritice nezářídka podrobovaný, výklad nabízí Bergmann, W. *Innovationen im Quadrivium des 10. und 11. Jahrhunderts. Studien zur Einführung von Astrolab und Abakus im Lateinischen Mittelalter*. Stuttgart: Franz Steiner Verlag, 1985, s. 179–213.

¹² Životopisnou črtu o Gerbertovi sepsal již jeho současník Richer z Remeše (Richerus Remensis. *Historiarum libri quatuor* III, 43–65. Ed. Hoffmann, H. *MGH SS*. T. 38. Hannover: Impensis Bibliopolii Hahniani, 2000, s. 191–205). Podstatné údaje nabízí také jeho korespondence, na podrobnější informace o životě, díle, příp. legendě viz např. Flusche, A. M. *The Life and Legend of Gerbert of Aurillac. The Organbuilder Who Became Pope Sylvester II*. Lewiston: The Edwin Mellen Press, 2005; Lattin, H. P. *Peasant Boy who became Pope. Story of Gerbert*. London – New York: Abelard-Schuman, 1958; Riché, P. *Gerbert d'Aurillac: Le pape de l'an mil*. Paris: Fayard, 1987; Tosi, M. (ed.). *Gerberto – scienza, storia e mito. Atti del Gerberti Symposium*. Bobbio: A.S.B., 1985; Oldoni, M. Gerberto e la sua Storia. *Studi Medievali*, vol. 18, no. 2 (1977), s. 629–704; Oldoni, M. ‚A fantasia dicitur fantasma‘ (Gerberto e la sua storia, II). *Studi Medievali*, vol. 21, no. 2 (1980), s. 493–622; Oldoni, M. ‚A fantasia dicitur fantasma‘ (Gerberto e la sua storia, II) II. *Studi Medievali* vol. 24, no. 1 (1983), s. 167–245 a mnoho dalších.

¹³ O jeho životě jsme zpraveni především zásluhou životopisného spisu Aimona z Fleury (Aimonius Floriacensis. *Vita sancti Abbonis*. In *PL* 139, c. 387–414) a jeho vlastní korespondence či jeho textů (viz Abbo Floriacensis. *Epistolae*. In *PL* 139, c. 419–462; resp. Abbo Floriacensis. *Apologeticus ad Hugonem et Rodbertum*. In *PL* 139, c. 461–472). Na další informace viz např. Dachowski, E. *First Among Abbots: The Career of Abbo of Fleury*. Washington: The Catholic University of America Press, 2008; Riché, P. *Abbon de Fleury: un moine savant et combatif (vers 950-1004)*. Turnout: Brepols, 2004; Engelen, E.–M. *Zeit, Zahl und Bild. Studien zur Verbindung von Philosophie und Wissenschaft bei Abbo von Fleury*. Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1993; Mostert, M. *The political theology of Abbo of Fleury: a study of the ideas about society and law of the tenth-century monastic reform movement*. Hilversum: Verloren, 1987 a řada dalších.

poloviny 60. let?) a proslavil se svými znalostmi církevních autorit i svobodných umění. Byl blízkým přítelem lutyšského biskupa Notkera, s nímž mimo jiné v letech 989–990 cestoval do Říma. Na sklonku roku 990 byl vysvěcen v opatské funkci, v níž Heriger setrval do své smrti (31. 10. 1007).¹⁴

Nejméně toho víme o Berneliově mladším z Paříže. V zásadě se lze držet pouze jeho traktátu o abaku, který je uveden jeho jménem (*Junior Bernelius Parisius*), a v jehož předmluvě samotný autor vzdává hold papeži Gerbertovi, který se zasloužil o rozvoj abacistických výpočtů.¹⁵ Především slovní spojení „papež Gerbert“ je důvodem, proč někteří předpokládají, že Bernelius nabyt tyto poznatky v Remeši za učitelského působení Gerberta, případně své dílo sepsal v době Silvestrova pontifikátu nebo bezprostředně po Gerbertově smrti.¹⁶

Díla těchto čtyř osobností,¹⁷ společně např. s Walterem ze Špýru¹⁸ či abacistickým pojednáním v tzv. Pseudo-Boethiově *Geometrii II* neznámého autora¹⁹ a dalšími anonymními komentáři,²⁰ obsahují základní dochované zmínky o užívání raně středověkého abaku, pročež jim bude v dalším textu věnována primární pozornost a to zejména s ohledem na jejich traktování samotného násobení.

Abakus, digitus a artikulus

Abakus je v raném středověku používán jako (povětšinou) velká tabule nebo deska, na níž jsou vyznačeny sloupce, které reprezentují řády v desítkové soustavě (viz obr. 1). Do těchto sloupců se vkládají symboly čísel, jejichž způsob zápisu je obdobný našemu dnešnímu zapisování číselných hodnot. Např. chce-li abacista zapsat na svou pomůcku hodnotu 709, pak vloží symbol pro devítku do sloupce pro jednotky, symbol pro sedmičku do sloupce pro stovky a sloupec pro desítky nechá prázdný (abacisté kolem roku 1000 nepoužívali nulu, která na sloupcovém abaku není zapotřebí, daný sloupec zůstane prostě prázdný). Také vlastní početní úkony (např. sčítání, odčítání, násobení, mocnění apod.) jsou principiálně podobné dnes obvyklému počítání (částečnou výjimkou je dělení), tzn. chtěl-li raně středověký počtář např. sčítat, postupoval podle jednotlivých sloupců, sečetl hodnoty v nich obsažené a dosáhl-li dvouciferné hodnoty, přesunul hodnotu desítek do dalšího sloupce vlevo, kde ji přičetl k cifrám, které v tomto sloupci byly již při zadání.

¹⁴ Na podrobnější informace viz např. Babcock, R. G. Heriger and the study of philosophy at Lobbes in the tenth century. *Traditio* vol. 40 (1984), s. 307–317; Lutz, C. E. *Schoolmasters of the Tenth Century*. Hamden: Archon Books, 1977, s. 99–100; Hirzel, O. *Abt Heriger von Lobbes, 990-1007*. Leipzig: Teubner, 1910.

¹⁵ Bernelius, *LA*, praef., s. 16: „*Cogis enim et crebris pulsas precibus ut tibi multiformes abaci rationes persequatur diligenter negligentia quidem apud nos iam paene demersas, sed a domino papa Gerberto quasi quaedam seminaria breuiter et subtilissime seminat.*“

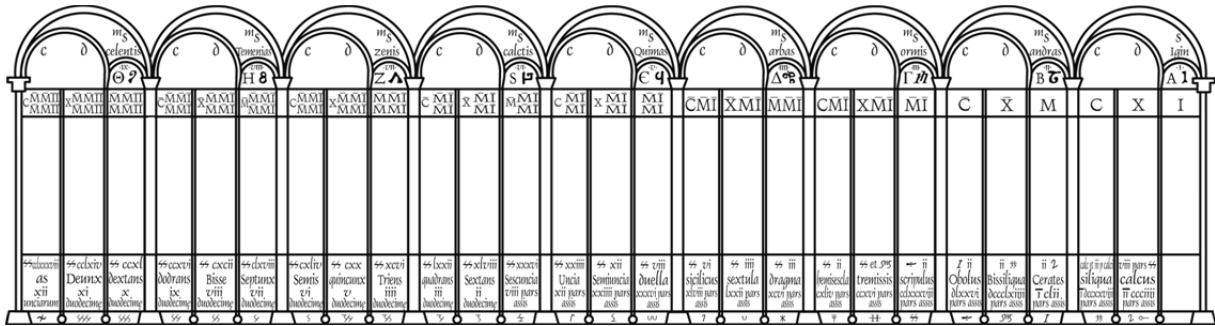
¹⁶ Viz např. Bakhouché, B. Introduction. In Bernelin, élève de Gerbert d'Aurillac, *Libre d'Abaque*, s. 9; Bergmann, W. *Innovationen im Quadrivium*, s. 199; Lindgren, U. *Gerbert von Aurillac und das Quadrivium. Untersuchungen zur Bildung im Zeitalter der Ottonen*. Wiesbaden: Franz Steiner Verlag, 1976, s. 46 ad.

¹⁷ Srov. např. Folkerts, M. Frühe Darstellungen des Gerbertschen Abakus, s. 24–25.

¹⁸ Walther von Speyer. *Libellus de studio I*, v. 169–173. Ed. Streckler, K. In *Die Lateinischen Dichter des deutschen Mittelalters. MGH. Poetae Latini mediae aevi*. T. 5/1. Leipzig: Verlag K. W. Hiersemann, 1937, s. 22: „*Inde abaci metas defert Geometrica miras / Cumque caracteribus iniens certamina lusis. / Ocius oppositum redigens corpus numerorum / In digitos propere disperserat articulosque.*“

¹⁹ Pseudo-Boethius. *Geometria I*, 19. Ed. Folkerts, M. In: Folkerts, M. „Boethius“ *Geometrie II. Ein mathematisches Lehrbuch des Mittelalters*. Wiesbaden: Franz Steiner Verlag, 1970 [dále citováno jako Pseudo-Boethius, *Geometria*], s. 137–144.

²⁰ Na některé jejich edice viz např. *Gerberti postea Silvestri II papae Opera Mathematica*, s. 225–284.



Obr. 1 – Jedna z možných podob raně středověkého abaku (v malých obloucích jsou symboly západoarabských, řeckých i římských číslic). Překresleno podle Oxford, St. John's College, MS 17, 48v–49r. Fotokopie tohoto abaku viz Evans, G. R. *Difficillima et Ardua: theory and practice in treatises on the abacus, 950–1150. Journal of Medieval History*, vol. 3 (1977), s. 22–23; celý rukopis je přístupný elektronicky, abakus je na nalezení na WWW: <http://digital.library.mcgill.ca/ms-17/folio.php?p=48v>; resp. <http://digital.library.mcgill.ca/ms-17/folio.php?p=49r>.

Rovněž o násobení platí, že samotný princip abacistického násobení je pro člověka 21. století snadno pochopitelný, neboť se *de facto* shoduje s tím, jak dnes počítáme. Ovšem pro matematika kolem roku 1000, který byl zvyklý vyjadřovat číselné hodnoty slovně nebo římskými číslicemi, byl značný problém v samotném zápisu čísel na početní tabulku, tedy v pochopení decimálního systému zápisu čísel. Z tohoto důvodu začali abacisté konce 10. století užívat pojmy *digitus* a *articulus*, které byly v raně středověké matematice dobře známé, avšak v souvislosti s abakem se začaly užívat v modifikované podobě. Aby bylo možné pochopit, co říkají samotné *regulae multiplicationis* matematiků kolem zlomu milénia, je nezbytné vědět, co znamenají termíny *digitus* a *articulus*, jak upozorňoval již Gerbert z Remeše Konstantina z Fleury, adresáta svého listu, k němuž *Pravidla pro počítání na abaku* přiložil.²¹ Zjevně však Gerbert nepochyboval, že to Konstantin ví, neboť jeho *Regulae* vysvětlení těchto pojmů nenabízí.

Ostatní matematická pojednání, na něž se zaměřila tato studie, jsou v tomto směru sdílnější. *Digitus* latinsky znamená prst a označuje jednotky, neboť při počítání na prstech se vztyčenými a ohnutými prsty levé ruky vyjadřovaly hodnoty 1–9. Tedy: Jednička je vyjádřena ohnutým malíčkem doprostřed dlaně a ostatní prsty jsou vztyčeny; dvojku představuje stejně tak ohnutý malíček a prsteníček, zbylé tři prsty jsou vztyčeny; při trojce je navíc do prostředka dlaně ohnutý i prostředníček; čtyřka je znázorňována ohnutým prostředníčkem a prsteníčkem, zatímco zbylé tři prsty levé ruky zůstávají vztyčeny; při vyjádření pětky je ohnutý pouze prostředníček; u šestky je ohnutý pouze prsteníček; pro sedmičku, osmičku a devítku platí, že jsou podobné jako hodnoty 1–3, tedy je ohnutý malíček (7), malíček a prsteníček (8) a malíček, prsteníček a prostředníček (9), ovšem ohnuté prsty v těchto případech směřují přes celou dlaň.²² *Articulus* latinsky znamená článek, neboť v uvedeném způso-

²¹ Gerbertus. *Regulae de numerorum abaci rationibus*. Ed. Bubnov, N. In *Gerberti postea Silvestri II papae Opera Mathematica* [dále citováno jako Gerbertus, *Regulae*], s. 7: „*Quid enim dicet esse digitos, articulos, minuta, qui auditor majorum fore dedignatur?*“

²² Srov. např. Beda Venerabilis. *De temporum ratione liber I*. Ed. Jones, C. W. CCSL 123B. Turnhout: Brepols, 1977, s. 269: „*Porro centesimus numerus (quaeso, diligenter lector, attende) a sinistra transfertur ad dexteram et, hisdem quidem digitis, sed non eadem manu, quibus in laeva manu nuptae significantur et uiduae, circulum faciens exprimit uirginitatis coronam. Cum ergo dicis unum, minimum in laeva digitum inflectens, in medium palmae artum infiges. Cum dicit duo, secundum a minimo flexum, ibidem impones. Cum dicis tria, tertium similiter adflectes. Cum dicit quattuor, itidem minimum leuabis. Cum dicis quinque, secundum a minimo similiter eriges. Cum dicis sex, tertium nihilominus eleuabis, medio dumtaxat solo, qui medicus appellatur, in medium*

bu počítání na prstech se vyšší hodnoty čísel (zde desítky) vyjadřovaly pomocí článků prstů. Např. pro desítku platí, že se ukazováček levé ruky dotýká prostředku palce téže ruky; pro třicítku, že se palec a ukazováček dotýkají horními články (příp. nehty), ostatní prsty jsou vztyčeny; u devadesátky se zase ukazováček dotýká kořene palce atd.²³

Abbo z Fleury ve svém komentáři k Victoriovu dílu vychází z této počtářské tradice, když píše, že jednotky se vyjadřují na levé ruce přesně stejným způsobem, jaký byl právě představen, u desítek je pak třeba zapojit články prstů.²⁴ Hned v dalším pokračování svého pojednání však Abbo přechází k obměněnému užívání těchto termínů, které je již plně v intencích abacistické matematiky. Na příkladu násobení desítek desítkami říká, že v takovémto případě je zapotřebí digitus výsledku umístit do řádu stovek a artikulus do tisícovek.²⁵ Vše pak dokládá příkladem, v němž násobí $60 \cdot 60$, tzn. jsou násobeny desítky desítkami, přičemž stačí vynásobit $6 \cdot 6 (= 36)$ a digitem výsledku je vždy menší řád získané hodnoty (tj. 6) a artikulus je vyšším řádem uvedeného čísla (tj. 3). Následně stačí podle představené regule umístit digitus výsledku (tj. 6) do řádu stovek a artikulus (tj. 3)²⁶ výsledku do řádu tisíců. Abbo zde jasně ukazuje, jak se vžily a užívaly termíny digitus a artikulus – nejprve označovaly hodnoty 1–9, resp. hodnoty 10, 20, 30, ..., 90, při počítání na prstech, následně byly použity na zápis čísel v desítkové soustavě, kdy digitus představuje jednoduché (jednociferné) číslo, kdežto artikulus vyjadřuje desítky (např. u složeného čísla 36 platí, že 3 je artikulus, neboť vyjadřuje tři desítky, a 6 je digitus, tzn. šest jednotek).

V podobném duchu rovněž další abacistická pojednání vymezují oba klíčové pojmy regulí pro násobení na početní tabulce. Heriger uvádí, že máme-li složené číslo, pak je toto číslo tvořeno právě digitem a artikulem. Artikulus tvoří větší část takového čísla (tj. řád desítek, např. tedy 10, 20 atd.), digitus je menší část složeného čísla, tedy jednotky do deseti.²⁷ Bernellius se definování těchto pojmů nevěnuje, pouze přidává, že symboly číslic, s nimiž se na abaku pracuje (tzv. *characteres*) odpovídají digitům, tedy že číselné hodnoty 1–9, pro něž mají abacisté symbolické vyjádření v podobě číslic,²⁸ jsou abacisty nazývány digity.²⁹ A dále dopl-

*palmae fixo. Cum dicis septem, minimum solum, caeteris interim leuatis, super palmae radicem pones. Iuxta quem cum dicis octo, medicum. Cum dicis nouem, impudicem e regione compones.*²³

²³ Podrobněji viz *ibid.*, s. 269–270: „*Cum dicis decem, unguem indicis in medio figes artu pollicis. Cum dicis uiginti, summitatem pollicis inter medios indicis et impudicis artus immittes. Cum dicis triginta, ungues indicis et pollicis blando coniunges amplexu. Cum dicis quadraginta, interiora pollicis lateri uel dorso indicis superduces, ambobus dumtaxat erectis. Cum dicis quinquaginta, pollicem exteriore artu instar graecae literae gammae curuatum, ad palmam inclinabis. Cum dicis sexaginta, pollicem (ut supra) curuatum, indice circumflexo diligenter a fronte praecinges. Cum dicis septuaginta, indicem (ut supra) circumflexum pollice immisso superimplebis, ungue dumtaxat illius erecto trans medium indicis artum. Cum dicis octoginta, indicem (ut supra) circumflexum, pollice in longum tenso implebis, ungue uidelicet illius in medium indicis artum infixio. Cum dicis nonaginta, indicis inflexi unguem radici pollicis erecti infiges.*“

²⁴ Abbo, *In Calc.* III, 67, s. 114–115. Srov. také Bridfertus Ramesiensis. *De loquela per gestum digitorum et temporum ratione libellus*. In *PL* 90 [dále citováno jako Bridfertus, *De loquela*], c. 688.

²⁵ Abbo, *In Calc.* III, 67, s. 115: „*His ergo edoctus, si multiplicaveris decenum per decenum, dabis unicuique digito C et omni articulo mille.*“

²⁶ *Ibid.* III, 68, s. 115: „*Verbi gratia, dum sexagies sexagenos perquiris, sexies senos XXXVI esse inuenis, ubi sunt tres articuli et sex digiti...*“

²⁷ Herigerus. *Regulae de numerorum abaci rationibus*. Ed. Bubnov, N. In *Gerberti postea Silvestri II papae Opera Mathematica* [dále citováno jako Herigerus, *Regulae B*], s. 209: „*Digiti autem appellantur minores numeri, qui intra denarium constituti vel simpliciter enuntiantur, vel etiam cum ipsis majoribus id est X, XX, XXX, et similibus componuntur. Qui uidelicet majores numeri pro eo appellantur articuli, quod ipsos minores intra se concludant et arcent.*“ Srov. také *Commentarii in Gerberti regulas de numerorum abaci rationibus*. In *Gerberti postea Silvestri II papae Opera Mathematica*, s. 252.

²⁸ Podrobněji na podobu těchto číslic viz např. Folkerts, M. Frühe westliche Benennungen der indisch-arabischen Ziffern und ihr Vorkommen. In Folkerts, M. – Lorch, R. (eds.). *Sic itur ad astra: Studien zur Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften. Festschrift für den Arabisten Paul Kunitzsch zum 70. Geburtstag*. Wiesbaden: O. Harrassowitz Verlag, 2000, s. 216–233; nebo Folkerts, M. The names and forms of the numerals

Otisk, M. *Regulae multiplicationis* v abacistických textech Gerberta z Remeše, Abbona z Fleury, Herigera z Lobbes a Bernellia z Paříže, *Pro-Fil*, vol. 12, no. 1 (2011). ISSN 1212-9097, s. 3-41. Dostupné online:

<http://www.phil.muni.cz/journals/index.php/profil/article/view/147>

ňuje upozornění, že počítáme-li na abaku, je nezbytné vědět, že když číselná hodnota překročí do dalšího desetinného řádu (*linea*), pak je zapotřebí rozlišovat, kdy se ještě jedná o digitus a kdy už o artikulus.³⁰

V souhrnu tedy můžeme říci, že digitus představuje číselné hodnoty menší než deset, artikulus pak představuje čísla, která lze rozdělit na deset stejných částí, neboť je tvoří deset jednotek. S využitím dělení čísel na jednoduchá a složená³¹ lze pak mnohem snadněji porozumět všem následujícím regulím pro násobení.

Pravidla násobení

S jen velmi mírnou nadsázkou lze říci, že všechna pravidla pro násobení na abaku jsou ve zmíněných textech vlastně totožná. Vždy se jedná o výčet regulí, v nichž se říká, že násobíme-li číslo v určité pozici (sloupci) na abaku číslem v jiné (příp. stejné) pozici na abaku, pak výsledek bude zapsán do přesně vymezeného sloupce. Jedná se tedy o představení řádu čísel v desítkové soustavě a vlastní regule pouze ukazují, v jakém řádu se bude nacházet výsledek daného násobení. Obvyklá podoba pravidla pro násobení by tedy mohla vypadat např. takto:

Pokud násobíš desítky se stovkami, digitus výsledku umístíš do sloupce pro tisíce a artikulus výsledku umístíš do sloupce pro desetitisíce.

Gerbert ve svých *Regulae multiplicationis* spisku *Regulae de numerorum abaci rationibus* zmiňuje 20 (resp. v pozdější upravené verzi jeho díla 21) pravidel, v nichž popisuje všechny případy, kdy jsou násobena čísla, která se nacházejí v prvních šesti sloupcích abaku zprava (tedy od řádu jednotek po řád statisíců, tj. 10^0 až 10^5). V původní verzi (tzv. *textus Gerberti genuinus*) lze jednotlivé regule seřadit do tří sekvencí:

1. devět pravidel pro násobení činitelů v prvních čtyřech sloupcích zprava (tzn. 10^0 až 10^3) – tj. regule [1], [26], [27], [50], [51], [72], [2], [3] a [28];
2. šest pravidel pro násobení s činitelem v šestém sloupci (10^5) – tj. regule [110], [93], [74], [53], [30] a [5];
3. pět pravidel pro násobení s činitelem v pátém sloupci (10^4) – tj. regule [92], [73], [52], [29] a [4].³²

Tímto výčtem pokryl Gerbert všechny případy, kdy se násobí čísla od jednotek po statisíce. Jedinou chybějící regulí je případ, kdy se násobí jednotky s jednotkami [0], což doplňuje tzv. *textus interpolatus*,³³ čímž završuje počet pravidel v první sekvenci na 10.

Gerbertova *Pravidla násobení* se zevrubně věnovala prvním šesti sloupcům. To první část Herigerových *Regulae numerorum super abacum*, která se zabývá výhradně násobením, je rozdělena do třinácti částí a postupně se v ní popisují:

on the abacus in the Gerbert tradition. In Nuvolone, F. G. (ed.), *Gerberto d'Aurillac da Abate di Bobbio a Papa dell'Anno 1000. Atti del Congresso internazionale*. Bobbio: A.B.S., 2001, s. 245–265.

²⁹ Bernelius, *LA*, praef., s. 18: „*Deinde apponemus ipsos characteres et quo modo hi numeri quos digitos uocamus se uel alios metiantur.*“

³⁰ *Ibid.* I, s. 26: „*Sed cum per hos omnis abaci numerositas ministretur, ex praesignatis oportet reminisci omnes eius lineas, ut diximus, decuplo superare vel superari, ac per hoc nunc hos constitui ut digitos, nunc vero articulos.*“

³¹ Srov. např. Pseudo-Boethius, *Geometria* I, 19, s. 138; resp. Bridfertus, *De loquela*, c. 688.

³² Gerbertus, *Regulae*, s. 8–11. Jejich znění a překlad viz Příloha B. Očíslování jednotlivých pravidel je dodáno autorem tohoto článku a koresponduje s pořadím pravidel u Herigera z Lobbes; srov. také tab. 1.

³³ *Ibid.*, s. 8–9. V celém upraveném textu Gerbertova spisku jsou pravidla řazena podle jiného klíče: nejprve se popisují násobky jednotek (tj. regule [0], [1], [2], [3], [4] a [5]), poté desítek (tj. regule [26], [27], [28], [29] a [30]), stovek (tj. regule [50], [51], [52] a [53]), tisíců (tedy regule [72], [73] a [74]), desetitisíců (regule [92] a [93]) a nakonec statisíců (tzn. pravidlo [110]) – viz *ibid.*, s. 8–11.

1. regule pro násobení jednotek, počínaje násobením jednotek desítkami (násobení jednotek jednotkami chybí) a konče násobením jednotek desítkami kvadrilionů (10^{25}), tj. celkem 25 pravidel (tj. [1]–[25]);
2. regule pro násobení desítek – od násobení desítek desítkami po násobení desítek kvadriliony (10^{24}), tj. celkem 24 pravidel (tj. [26]–[49]);
3. regule pro násobení stovek – od násobení stovek stovkami po násobení stovek stovkami triliard (10^{23}), tj. celkem 22 pravidel (tj. [50]–[71]);
4. regule pro násobení tisíců – od násobení tisíců tisíci po násobení tisíců desítkami triliard (10^{22}), tj. celkem 20 pravidel (tj. [72]–[91]);
5. regule pro násobení desetitisíců – od násobení desetitisíců desetitisíci po násobení desetitisíců triliardami (10^{21}), tj. celkem 18 pravidel (tj. [92]–[109]);
6. regule pro násobení statisíců – od násobení statisíců statisíci po násobení statisíců stovkami trilionů (10^{20}), tj. celkem 16 pravidel (tj. [110]–[125]);
7. regule pro násobení milionů – od násobení milionů miliony (10^6) po násobení milionů desítkami trilionů (10^{19}), tj. celkem 14 pravidel (tj. [126]–[139]);
8. regule pro násobení desítek milionů – od násobení desítek milionů desítkami milionů (10^7) po násobení desítek milionů triliony (10^{18}), tj. celkem 12 pravidel (tj. [140]–[151]);
9. regule pro násobení stovek milionů – od násobení stovek milionů stovkami milionů (10^8) po násobení stovek milionů stovkami biliard (10^{17}), tj. celkem 10 pravidel (tj. [152]–[161]);
10. regule pro násobení miliard – od násobení miliard miliardami (10^9) po násobení miliard desítkami biliard (10^{16}), tj. celkem 8 pravidel (tj. [162]–[169]);
11. regule pro násobení desítek miliard – od násobení desítek miliard desítkami miliard (10^{10}) po násobení desítek miliard biliardami (10^{15}), tj. celkem 6 pravidel (tj. [170]–[175]);
12. regule pro násobení stovek miliard – od násobení stovek miliard stovkami miliard (10^{11}) po násobení stovek miliard stovkami bilionů (10^{14}), tj. celkem 4 pravidla (tj. [176]–[179]);
13. regule pro násobení bilionů – od násobení bilionů biliony (10^{12}) po násobení bilionů desítkami bilionů (10^{13}), tj. 2 pravidla (tj. [180] a [181]).³⁴

Tento značně rozsáhlý Herigerův výčet pravidel je motivován snahou popsat všechny případy násobení, které lze na raně středověkém abaku provádět. Omezení je zde dáno pouze uspořádáním tohoto abaku, neboť abacisté konce 10. století pracovali s početní tabulkou, která obsahovala 27 sloupců pro matematické úkony s celými čísly (tedy řady 10^0 – 10^{26}). Z toho plyne, že nejvyššími násobenými čísly mohla být taková, jejichž součin nepřesáhne stovky kvadrilionů, tj. řád 10^{26} . Pochopitelně nekonečné řadě čísel nic nebrání pokračovat i do vyšších řádů, jak si byl Heriger dobře vědom,³⁵ avšak pak již nelze k těmto násobícím výpočtům použít sedmadvacetisloupcový abakus.

³⁴ Herigerus Lobienis [Gerbertus Auriliacensis]. *Regula de abaco computi*. Ed. Olleris, A. In *Œuvres de Gerbert, pape sous le nom de Sylvestre II*. Clermont-Ferrand – Paris: Thibaut – Dumoulin, 1867 [dále citováno jako Herigerus, *Regulae O*], s. 311–324. Jejich znění a překlad viz Příloha A. Také u pravidel násobení Herigera z Lobbes platí, že čísla jednotlivých regulí v hranatých závorkách jsou dodána autorem této studie a korespondují s přehledem v tab. 1. V Ollerisem vydaném textu tohoto spisu je několik chyb v určení řádů sloupců, které jsou zde opraveny. Srov. také Herigerus, *Regulae B*, s. 208–209.

³⁵ Herigerus, *Regulae B*, s. 209: „*Secundum dispositionem numerorum abaci non potest haec multiplicatio ulterius progredi. Si quis autem velit in infinitum protendere ipsam normam abaci ad formam hujusce dispositionis, possunt et praemissi numeri et residui in infinitum multiplicari ita, ut multiplicandi in se reducti semper in alios majores pari a se ordine distantes resolvantur, excepto primo singulari qui per se multiplicatus semper in se*

Právě nekonečnou řadu čísel zmiňuje hned ve svém úvodu i tzv. *Abbonis abacus*, což zjevně dokládá, že předšcholastičtí či raněšcholastičtí abacisté rozlišovali mezi samotnou matematickou posloupností a možnostmi, které jim nabízela jejich pomůcka – však také záhloví Abbonova abaku hned dodává, že zde bude pojednáno pouze o číslech od řádu jednotek po řád statisíců a nejvyšší číslo tedy bude tedy začínat devítkou a bude šestimístné (tento „abakus“ má tudíž šest sloupců).³⁶

Abbo z Fleury zmiňuje ve svém komentáři k Victoriovi jen vybrané případy násobení jednotlivých řádů,³⁷ navíc tyto případy jsou zahrnuty i ve vyobrazení *Abbonis abacus*. Pořadí uvedených regulí do značné míry (v prvních šesti případech vlastně zcela) kopíruje Gerbertův výčet, tj. regule [1], [26], [27], [50], [51] a [72]. Oproti Gerbertovi (a také dalším zde porovnaným textům o násobení na abaku) však uvádí i tři případy, tj. regule [1a], [27a] a [51a],³⁸ které zahrnují asociativní zákon pro činitele – tedy že $a \cdot b = b \cdot a$. Tímto se dostává do rozporu s Herigerovým tvrzením, který jasně uvádí (v souladu s formulacemi pravidel pro násobení), že menší číslo se násobí větším (příp. stejným, jak ukazují regule), kdežto při dělení se postupuje tak, že je větší číslo děleno menším.³⁹

Tato odlišnost Abbonových regulí oproti ostatním abacistickým pojednáním, která v rámci matematického hodnocení vychází pozitivně pro opata z Fleury, však odkazuje spíše k tomu, že samotný Abbo neprováděl vlastní početní úkony na početní tabulce, kde se předpokládá, že se vždy bude menší číslo násobit větším (příp. stejným), neboť lze variovat mezi násobencem a násobitelem. Ostatně i samotná podoba tzv. *Abbonova abaku*⁴⁰ je jen zdánlivě blízká použitelné početní tabulce. Jsou zde sice jednotlivé sloupce, které představují řády čísel, a oblouky zastřešující vždy trojici řádů, avšak jejich uspořádání je zleva doprava (jednotky vlevo, statisíce vpravo), nikoli zprava doleva, jak to vyžaduje zápis číselných hodnot v desítkové soustavě i samotný abakus, na němž matematikové kolem roku 1000 počítali.

V dalším výčtu regulí už „Abbonův abakus“ přidává jen dvě (díky uvedení i obráceného pořadí činitelů čtyři) pravidla pro násobení desítkami, tj. regule [28], [28a], [29a] a [29], a jedno pravidlo pro desetitisíce, tj. regule [92]. Celkově tedy *abaci doctor* prezentuje 14 regulí pro násobení, což je ovšem více, než jich lze nalézt v letmém Berneliově přehledu, jehož *Liber abaci* je v tomto ohledu poměrně skoupá a nabízí všehovšudy 8 pravidel, z nichž šest se týká násobení jednotek, kde druhý činitel je v řádech desítek až milionů (tj. regule [1]–[6]) a dvě pravidla uvádí pro násobení desítek, když druhý činitel se nachází ve sloupci stovek, respektive statisíců (tj. regule [27] a [30]).⁴¹ K tomuto stručnému představení umístění vý-

reducitur nec non multiplicatores eorum toto a se ordine longe constituent digitus, quoto fuerint multiplicandi ipsi post primam unitatem collocati, articulos vero semper uno tantum gradu ante digitos mittant.“

³⁶ *Abbonis Abacus*. Ed. Bubnov, N. In *Gerberti postea Silvestri II papae Opera Mathematica* [dále citováno jako Abbo, *Abacus*], s. 203: „In hac figura descriptus est numerus infinitus: incipit enim ab uno pervenitque usque ad nongentesimum millesimum.“

³⁷ Abbo, *In Calc.* III, 64, s. 113–114.

³⁸ Abbo, *Abacus*, s. 203. Jejich znění a překlad viz Příloha C. Stejně jako v předchozích případech i zde je očíslování jednotlivých pravidel dodáno autorem této studie, přičemž případy, kdy je zohledněna asociativita činitelů jsou označeny stejným číslem s rozlišením v podobě „a“; přehledněji viz tab. 1.

³⁹ Herigerus, *Regulae B*, s. 209: „Debent igitur minores per majores multiplicari, sicut contra majores per minores dividi.“

⁴⁰ Na jeho vyobrazení viz např. Burnett, Ch. *Abbon de Fleury abaci doctor*. In Obrist, B. (ed.). *Abbon de Fleury. Philosophie, sciences et comput autour de l'an mil.* 2. vyd. Paris-Villejuif: Publications universitaires Denis Diderot, 2006 [*Oriens-Occidens. Sciences, mathématiques et philosophie de l'Antiquité à l'Age classique*, vol. 6 (2006)] s. 211; nebo elektronickou kopii rukopisu St. John's College MS 17, f. 35r; dostupné na WWW: <http://digital.library.mcgill.ca/ms-17/folio.php?p=35r>.

⁴¹ Bernelius, *LA I*, s. 27: „[1] Si igitur singularis decenum multiplicauerit, dabit unicuique digito decem, et omni articulo centum; [2] si centenum, dabit unicuique digito centum, et omni articulo mille. [27] Si uero decenus centum multiplicauerit, dabit unicuique digito mille, et omni articulo decem milia. [3] Et si singularis millenum, dabit unicuique digito mille, et omni articulo decem milia. [4] Si decenum millenum, dabit unicuique digito de-

Otisk, M. *Regulae multiplicationis* v abacistických textech Gerberta z Remeše, Abbona z Fleury, Herigera z Lobbes a Bernelia z Paříže, *Pro-Fil*, vol. 12, no. 1 (2011). ISSN 1212-9097, s. 3-41. Dostupné online:

<http://www.phil.muni.cz/journals/index.php/profil/article/view/147>

sledků násobení činitelů v jednotlivých sloupcích abaku, které má spíše jen ilustrativní charakter, Bernelius dodává, že správné umístění digitu a artikulu výsledku je stejné, pokud se činitelé vzájemně promění o jeden řád – tedy digitus i artikulus výsledku bude umístěn totožně pro násobení jednotek tisíci i pro násobení desítek stovkami, případně pro součin jednotek miliony i pro násobení desítek stovkami tisíců.⁴²

Na počtu 182 regulí pro násobení, které lze na sedmadvacetisloupcovém abaku fakticky využít, se však nic nemění. Pro větší přehlednost jsou všechna zmíněná pravidla uvedena v tab. 1, kde čísla v hranatých odkazují na výčty regulí v přílohách a poznámkách citovaných textech abacistů.

	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}
10^0	[0]	[1a]											
10^1	[1]	[26]	[27a]	[28a]	[29a]								
10^2	[2]	[27]	[50]	[51a]									
10^3	[3]	[28]	[51]	[72]									
10^4	[4]	[29]	[52]	[73]	[92]								
10^5	[5]	[30]	[53]	[74]	[93]	[110]							
10^6	[6]	[31]	[54]	[75]	[94]	[111]	[126]						
10^7	[7]	[32]	[55]	[76]	[95]	[112]	[127]	[140]					
10^8	[8]	[33]	[56]	[77]	[96]	[113]	[128]	[141]	[152]				
10^9	[9]	[34]	[57]	[78]	[97]	[114]	[129]	[142]	[153]	[162]			
10^{10}	[10]	[35]	[58]	[79]	[98]	[115]	[130]	[143]	[154]	[163]	[170]		
10^{11}	[11]	[36]	[59]	[80]	[99]	[116]	[131]	[144]	[155]	[164]	[171]	[176]	
10^{12}	[12]	[37]	[60]	[81]	[100]	[117]	[132]	[145]	[156]	[165]	[172]	[177]	[180]
10^{13}	[13]	[38]	[61]	[82]	[101]	[118]	[133]	[146]	[157]	[166]	[173]	[178]	[181]
10^{14}	[14]	[39]	[62]	[83]	[102]	[119]	[134]	[147]	[158]	[167]	[174]	[179]	
10^{15}	[15]	[40]	[63]	[84]	[103]	[120]	[135]	[148]	[159]	[168]	[175]		
10^{16}	[16]	[41]	[64]	[85]	[104]	[121]	[136]	[149]	[160]	[169]			
10^{17}	[17]	[42]	[65]	[86]	[105]	[122]	[137]	[150]	[161]				
10^{18}	[18]	[43]	[66]	[87]	[106]	[123]	[138]	[151]					
10^{19}	[19]	[44]	[67]	[88]	[107]	[124]	[139]						
10^{20}	[20]	[45]	[68]	[89]	[108]	[125]							
10^{21}	[21]	[46]	[69]	[90]	[109]								
10^{22}	[22]	[47]	[70]	[91]									
10^{23}	[23]	[48]	[71]										
10^{24}	[24]	[49]											
10^{25}	[25]												

Tab. 1 – Výčty pravidel násobení podle raně středověkých abacistů. Šedě podbarvená pole představují řády činitelů součinů. Normálním písmem jsou vyznačeny regule uvedené pouze u Herigera z Lobbes; tučně jsou označena pravidla Gerberta z Aurillacu, kurzívou pak pravidla z tzv. *Abbonis abacus* a podtrženy jsou regule zmíněné Berneliem mladším z Paříže.

cem milia, et omni articulo centum milia. [5] Si centenum millenum, dabit unicuique digito centum milia, et omni articulo mille milia. [30] Quod si decenus, dabit unicuique digito mille milia, et omni articulo decies mille milia. [6] Et si singularis milies millenum multiplicauerit, dabit unicuique digito mille milia, et omni articulo decies mille milia.“ Ve shodě s předešlými případy jsou čísla regulí doplněna autorem této studie a odpovídají značení v tab. 1.

⁴² *Ibid.*: „Ex quibus colligitur idem ualere millenum singulari multiplicatum quod deceno centenum, milies millenum singulari multiplicatum quod deceno centenum millenum.“

Poměrně strohý a jednotvárný výčet regulí pro násobení je v abacistických textech v některých případech doplněn o další jednoduchou pomůcku pro násobení chtivého počtáře. Ne každý uživatel abaku si byl schopen zapamatovat všechna pravidla o umístění digitů a artikulů pro jednotlivé řády činitelů, proto byly výčty pravidel doplněny o poznámky, které obecně upozorňují na umístění výsledku násobení pro daný řád. Tyto poučky mají opětovně značně unifikovanou podobu, kterou lze zobecnit např. takto:

Násobí-li se násobencem v určitém řádu, bude digitus a artikulus součinu položen vždy do jistých sloupců umístěných nalevo (o kolik sloupců určuje řád násobence) podle řádu násobitele.

V původních Gerbertových regulích se zmíněná zobecňující pravidla nevyskytují, ale již v doplněné verzi je v podobě glos doložen soupis těchto pravidel pro násobení jednotlivých řádů: Jde-li o násobení jednotek, je digitus vždy položen do téhož sloupce, v němž se nachází násobitel, artikulus se pak posune o jeden sloupec doleva; násobí-li se desítkami, pak je digitus vždy umístěn do druhého sloupce nalevo od násobitele, artikulus do třetího (tzn. posun o jeden, resp. dva řády); v případě násobence v řádu stovek je digitus položen do třetího sloupce nalevo od násobitele a artikulus do čtvrtého (tzn. posun o dva, resp. tři řády); při násobení tisíců je digitus a artikulus umístěn pokaždé do čtvrtého, resp. pátého sloupce od čísla násobeného (tzn. posun o tři, resp. čtyři řády); pro další řády pak platí, že digitus výsledku s násobencem ve vyšším řádu zaujímá místo artikulu výsledku z předchozího řádu.⁴³

Herigerova *Pravidla* jsou i v tomto bodě rozsáhlejší, neboť každý z výše zmíněných třinácti řádů násobence je uveden shrnující formulí, která podle umístění násobence a násobitele vymezuje sloupce, v němž se bude nacházet digitus a artikulus výsledku součinu – detailně viz tab. 2.⁴⁴

řád násobence	počet sloupců, o něž se posouvá digitus výsledku součinu oproti řádu násobitele (v závorce možnosti na abaku o 27 sloupcích)	počet sloupců, o něž se posouvá artikulus výsledku součinu oproti řádu násobitele (v závorce možnosti na abaku o 27 sloupcích)
10^0 (jednotky)	0 (10^0-10^{25})	1 (10^1-10^{26})
10^1 (desítky)	1 (10^2-10^{25})	2 (10^3-10^{26})
10^2 (stovky)	2 (10^4-10^{25})	3 (10^5-10^{26})
10^3 (tisíce)	3 (10^6-10^{25})	4 (10^7-10^{26})
10^4 (desetitísíce)	4 (10^8-10^{25})	5 (10^9-10^{26})
10^5 (statisíce)	5 ($10^{10}-10^{25}$)	6 ($10^{11}-10^{26}$)
10^6 (milióny)	6 ($10^{12}-10^{25}$)	7 ($10^{13}-10^{26}$)
10^7 (desítky miliónů)	7 ($10^{14}-10^{25}$)	8 ($10^{15}-10^{26}$)
10^8 (stovky miliónů)	8 ($10^{16}-10^{25}$)	9 ($10^{17}-10^{26}$)
10^9 (miliardy)	9 ($10^{18}-10^{25}$)	10 ($10^{19}-10^{26}$)
10^{10} (desítky miliard)	10 ($10^{20}-10^{25}$)	11 ($10^{21}-10^{26}$)
10^{11} (stovky miliard)	11 ($10^{22}-10^{25}$)	12 ($10^{23}-10^{26}$)
10^{12} (bilióny)	12 ($10^{24}-10^{25}$)	13 ($10^{25}-10^{26}$)

Tab. 2 – Umístění digitu a artikulu výsledku násobení na abaku podle Herigera z Lobbes.

Vzhledem k povaze Abbonova komentáře k dílu *Calculus Victoria* z Akvitánie i tzv. jeho abaku nepřekvapí, že uvedená pravidla, zobecňující podrobné výčty pravidel pro umístění

⁴³ Gerbertus, *Regulae*, s. 10–11. Jejich znění a překlad viz Příloha B.

⁴⁴ Herigerus, *Regulae O*, s. 311–323. Na jejich znění a překlad viz Příloha A.

digitů a artikulů jednotlivých výsledků součinů se v jeho textech nenachází. To u Bernelia toto zevšeobecnující poučení pro počtáře nechýbí. Po zmínění řádového umístění digitů a artikulů v případech, kdy se násobí jednotkami, desítkami a stovkami dodává, že uvedeným způsobem, tj. přidávání vždy jednoho řádu oproti předchozímu, lze postupovat až do nekonečna,⁴⁵ samozřejmě pouze ve stejném případě, který zmiňoval výše Heriger, že se matematik nebude cítit vázán počty vyjádřitelných hodnot na abaku.

Tímto jsou probrány *de facto* veškeré náležitosti konkrétních i obecných pravidel pro násobení na abaku. Čtenář se dozvěděl jediné – bude-li násobit určitým číselným řádem určitý číselný řád, bude digitus výsledku v jistém řádu a artikulus pak v nejbližším vyšším.

Násobilka

Chtěl-li ale matematik na abaku skutečně počítat, musel nezbytně velmi dobře ovládat tzv. malou násobilku. Pro tyto potřeby mohli počtáři použít zejména *Calculus Victoria* z Akvitánie,⁴⁶ ale také např. Boethiův spis *De institutione arithmetica*.⁴⁷ Jistě ne náhodou se v zde probíraných matematických textech objevují odkazy na oba tyto zdroje. V případě Abbonova komentáře k Victoriovu textu je to nabíledni (a to včetně četných inspirací Boethiovým dílem), ale Victoria explicitně zmiňuje také Bernelius.⁴⁸ Gerbert ani Heriger se podobné problematice nevěnují, zvláště u Gerberta nelze pochybovat, že adresát jeho textu s touto věcí neměl nejmenší potíže, a pisatel tak necítil potřebu podobnou problematiku vůbec tematizovat. Naproti tomu Abbonův komentář i „jeho“ *abacus* sloužil především po potřeby komputistických výpočtů a v tomto kontextu se minimálně základní informace o násobilce určitě hodily. *Abbonis abacus* pak zahrnuje i konkrétní ukázky z násobilky – viz tab. 3.⁴⁹

$7 \cdot 1 = 7$	$7 \cdot 5 = 35$	$7 \cdot 9 = 63$	$7 \cdot 40 = 280$	$59 \cdot 1 = 59$	$59 \cdot 5 = 295$	$3 \cdot 59 = 177$
$7 \cdot 2 = 14$	$7 \cdot 6 = 42$	$7 \cdot 10 = 70$	$7 \cdot 50 = 350$	$59 \cdot 2 = 118$	$59 \cdot 6 = 354$	$4 \cdot 59 = 236$
$7 \cdot 3 = 21$	$7 \cdot 7 = 49$	$7 \cdot 20 = 140$	$7 \cdot 60 = 420$	$59 \cdot 3 = 177$	$1 \cdot 59 = 59$	$5 \cdot 59 = 295$
$7 \cdot 4 = 28$	$7 \cdot 8 = 56$	$7 \cdot 30 = 210$	$7 \cdot 70 = 490$ ⁵⁰	$59 \cdot 4 = 236$	$2 \cdot 59 = 118$	$6 \cdot 59 = 354$

Tab. 3 – Příklady násobilky z tzv. *Abbonis abacus*.

⁴⁵ Bernelius, *LA I*, s. 26: „*Idque de omnibus generaliter tenendum est, quia singularis quemcumque multiplicauerit, siue decenum, siue centenum, siue millenum uel ulteriores, in eodem ponet digitum, in secundo articulum. Et quemcumque decenus multiplicauerit, in secundo ab illo ponet digitum, in tertio articulum. Et quemcumque centenus multiplicauerit, in tertio ponet digitum, in quarto articulum, sicque per reliquos usque in infinitum potest ascendendo progredi.*“

⁴⁶ Victorius sestavil mimo jiné řadu devětačtyřiceti tabulek, které poskytují výsledky dvojnásobků až padesátinásobků pro hodnoty od 1000 po 1/144 – viz Victorius of Aquitaine, *Calculus*. Ed. Peden, A. M. In Abbo of Fleury and Ramsey. *Commentary on the Calculus of Victorius of Aquitaine* [dále citováno jako Victorius, *Calc.*], s. 4–37.

⁴⁷ Především v poslední třetině první knihy se Boethius věnuje poměrům, které jsou namnoze vystavěny na násobení a uvádí i tabulku „malé násobilky“ – viz Boethius. *De institutione arithmetica I*, 26. Ed. Oosthout, E. – Schilling, J. *CCSL 94A*. Turnhout: Brepols, 1999, s. 64.

⁴⁸ Bernelius, *LA IV*, s. 75.

⁴⁹ Abbo, *Abacus*, s. 204: „*Septies assim – VII. Septies bini – XIII. Septies terni – XXI. Septies quaterni – XXVIII. Septies quini – XXXV. Septies seni – XLII. Septies septeni – XLIX. Septies octoni – LVI. Septies novem – LXIII. Septies deni – LXX. Septies vicem – CXL. Septies tricem – CCX. Septies quadrageni – CCLXXX. Septies quinquageni – CCCL. Septies LXgeni – CCCCXX. Septies LXXgeni – CCCCXL. Quinquagies novies asse – LIX. Quinquagies novies bini – CXVIII. Q. n. terni – CLXXVII. Q. n. quaterni – CCXXXVI. Q. n. quini – CCXCV. Q. n. seni – CCCLIII. Semel LVIII – LVIII. Bis LVIII – CXVIII. Ter LVIII – CLXXVII. Quater LVIII – CCXXXVI. Quinquies LVIII – CCXCV. Sexies LVIII – CCCLIII.*“

⁵⁰ Bubnovova edice i oxfordský rukopis zde mylně uvádí hodnotu 440 (CCCCXL).

Cekem tedy osmadvacet příkladů násobení, kdy šestnáct z nich ukazuje násobky sedmi a dalších dvanáct násobky devětapadesáti. Vysvětlení užití právě těchto vzorů je uvedeno hned pod jejich výčtem a opětovně nenechává čtenáře na pochybách, že se zde nejedná o skutečný abakus, který by měl sloužit k provádění všech možných aritmetických operací, nýbrž o komputistickou pomůcku, která má usnadnit kalendářní výpočty.⁵¹ Číslo sedm automaticky evokuje počet dní v týdnu a pro komputistu představuje jedno z nejzákladnějších čísel (např. nedělní písmena, *litterae dominica*, určující den, na nějž připadne první neděle v roce, nebo tzv. konkurenty, *concurrentes*, uvádějící den v týdnu, na který připadne 24. březen). Číslo 59 je součtem dní dvou lunárních měsíců – jedna synodická perioda Měsíce, tj. výskyt stejné fáze Měsíce při pozorování ze Země, trvá asi 29,530588 dne (tj. 29 dnů, 12 hodin, 44 minut a 3 sekundy), při kalendářním využití se proto rozlišovaly tzv. duté měsíce (*mensis cavus*) o 29 dnech a plné měsíce (*mensis plenus*) o 30 dnech, přičemž jeden dutý a jeden plný měsíc dávají dohromady 59 dní. Právě z těchto důvodů je toto číslo využíváno pro tzv. *měsíční písmena* (*litterae lunaris*), která určují fázi měsíce v průběhu roku. Nejen tedy podoba, ale i tyto příklady z *Abbonis abacus* názorně dokládají praktické využití v tzv. *computus paschalis*.⁵²

Bernelius má oproti Abbonovi na mysli především samotné aritmetické operace, pročez vyjmenovává 36 případů násobení, jejichž znalost usnadní počítání na abaku a zdůrazní tak jeho vlastní hodnotu. Vždy se jedná o násobení digitů (tedy „malou násobilku“) a vynechává případy, kdy se stejné digity násobí navzájem (tj. druhé mocniny) i asociativitu činitelů (tzn. totožnost výsledku při násobení $a \cdot b$ a $b \cdot a$).⁵³ Zatímco bychom tedy v úplné tabulce násobení jednociferných hodnot očekávali 81 příkladů, *Liber abaci* jich nabízí jen 36. Bernelius totiž vynechává druhé mocniny (tj. případy $1 \cdot 1$, $2 \cdot 2$, $3 \cdot 3$ atd.), tedy celkem 9 úkonů, a nezmiňuje ani situace, v nichž by násobenec byl větší násobitele (stejně jako v případě menšího násobence – tj. Berneliovy příklady – jich je 36). Přehledněji je výčet „malé násobilky“ podle Bernelia uveden v tab. 4.⁵⁴

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		2	3	4	5	6	7	8	9
2			6	8	10	12	14	16	18
3				12	15	18	21	24	27
4					20	24	28	32	36
5						30	35	40	45
6							42	48	54
7								56	63
8									72
9									

Tab. 4 – 36 Berneliových případů, které ulehčují násobení na abaku z jeho *Liber abaci*.

⁵¹ Abbo, *Abacus*, s. 204: „*Haec vero scripta sunt ad feriam lunamque dividendam sive ad numerandum dies communis anni.*“

⁵² Detailněji o základních komputistických kategoriích a jejich aplikacích viz např. Špelda, D. *Astronomie ve středověku*. Ostrava: Montanex, 2008, s. 49–62, nebo Bláhová, M. *Historická chronologie*. Praha: Libri, 2001, s. 222–265.

⁵³ Bernelius, *LA I*, s. 25: „*Hi ergo digiti si se sua numerositate alterutrum metiantur, habebimus multiplicationes XXXVI horum incursione, quarum notitia et facilitatem pariet computandi et dignitatem seruabit abaci hoc modo.*“

⁵⁴ *Ibid.*, s. 26: „*Semel II – II. Semel III – III. Semel IIII – IIII. Semel V – V. Semel VI – VI. Semel VII – VII. Semel VIII – VIII. Semel VIII – VIII. Bis III – VI. Bis IV – VIII. Bis V – X. Bis VI – XII. Bis VII – XIV. Bis VIII – XVI. Bis VIII – XVIII. Ter IV – XII. Ter V – XV. Ter VI – XVIII. Ter VII – XXI. Ter VIII – XXIII. Ter VIII – XXVII. Quater V – XX. Quater VI – XXIII. Quater VII – XXVIII. Quater VIII – XXXII. Quater VIII – XXXVI. Quinquies VI – XXX. Quinquies VII – XXXV. Quinquies VIII – XL. Quinquies VIII – XLV. Sexies VII – XLII. Sexies VIII – XLVIII. Sexies VIII – LIII. Septies VIII – LVI. Septies VIII – LXIII. Octies VIII – LXXII.*“

Důvody absence případů, v nichž se vyšší číslo násobí menším, jsou asi zřejmé – jak už bylo zmíněno podle abacistů se vždy menší číslo násobí větším a nikoli naopak, neboť, jak Bernelius uvedl, lze činitele vzájemně kombinovat, tudíž není problém uspořádat čísla na abaku vždy tak, aby násobenec byl menší než násobitel. Chybění druhých mocnin je překvapivější. Snad se Bernelius mohl striktně držet toho, že je násobenec vždy menší, což případy násobení $2 \cdot 2$, $5 \cdot 5$ apod. nesplňují, možná považoval tyto případy za natolik zřejmé, že je není nutno uvádět, snad nám blíže neznámý Amélius, jemuž je Berneliův spis určen,⁵⁵ dobře znal např. tabulku násobení stejného čísla stejným, jak je uvádí Victorius z Akvitánie.⁵⁶

Násobení

Se znalostmi Berneliem (a částečně i Abbonem) uvedené násobilky se již vlastní proces násobení na abaku stává výrazně jasnější. Konkrétních příkladů, jak postupovat při určitém matematickém úkolu, však *regulae multiplicationis* sledovaných autorů nenabízí mnoho. Podobně jako v případě násobilky není žádná názorná ukázka násobení ani v Gerbertových, ani v Herigerových *Regulích*. Abbonův náznak konkrétního početního úkonu ($60 \cdot 60$) již zmíněn byl, ale obtížně mohl posloužit jako návod pro násobení pro abaku neznalého počtáře. Pouze u Bernelia, který na rozdíl od svých kolegů nevěnoval velkou pozornost jednotlivým pravidlům pro umístění digitů a artikulů výsledků součinů, se objevuje návodný příklad, jak při násobení na raně středověké početní tabulce postupovat. Tímto příkladem chce usnadnit pochopení práce na abaku.⁵⁷

Jde o následující – má být zjištěno, o kolika věcech a lidech se hovoří v této úloze: Existuje palác, který má dvanáct oken, v každém z nich je vidět dvanáct koberců a na každém z těchto koberců je dvanáct mužů, u každého muže je stejný počet žen a každá z těchto žen kojí dvanáct dětí.⁵⁸ V zásadě se tedy jedná o tento matematický výpočet:

$$x = 1 + 12 + 12^2 + 12^3 + 12^4 + 12^5$$

a tudíž je nezbytné pomocí násobení vyčíslit hodnoty 12^2 (tj. $12 \cdot 12$), 12^3 (tj. $12 \cdot 12 \cdot 12$), 12^4 (tzn. $12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12$) a 12^5 (tedy $12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12$).

Abychom rozuměli Berneliovu (a celkově abacistickému) postupu, je nezbytné vědět, že celou početní tabulku tento Pařížan nedělil pouze do třiceti sloupců (tři pro práci se zlomky, sedmadvacet pro výpočty s celými čísly), ale zároveň vodorovně rozdělil početní tabuli na čtyři části, což usnadňovalo jednotlivé kroky především při dělení,⁵⁹ ale zpřehledňovalo to i jednotlivé kroky při násobení, případně při kombinaci aritmetických operací, jako je tomu v uvedeném příkladu. Právě do čtvrté (spodní) části pak navrhuje vepsat podle pravidel zápisu čísel na abaku hodnotu 12 (tj. jedničku do řádu desítek a dvojku do řádu jednotek) a stejným způsobem zapsat tutéž hodnotu do první (horní) části abaku.⁶⁰ V horní části bude dvanáctka sloužit jako činitel při jednotlivých násobcích, ve spodní části pak již může být připraven jako

⁵⁵ *Ibid.*, s. 16.

⁵⁶ Viz Victorius, *Calc.*, s. 48.

⁵⁷ Bernelius, *LA I*, s. 27: „*Vt igitur multiplicandi regula uno exemplo facilius appareat, proponatur numeri cuiuslibet quaestio, haec quae sit huiusmodi:...*“

⁵⁸ *Ibid.*, s 27–28: „*... proposita una turri quae duodecim tantum contenta fenestris, in harum unaquaque duodecim stratus habeat, quorum unusquisque, susceptis duodecim uiris, eorum uniuscuiusque mulieres totidem habeat, quarum quaeque duodecim lacet infantes. Quaeratur ad cui numerositatis perueniant quantitatem per multiplicationis regulam.*“

⁵⁹ Podrobněji viz *ibid.*, s. 24–25.

⁶⁰ *Ibid.*, s. 28: „*Quod fiat tali modo: in quarto deceni tramite, tibi denarium ad denominationem sumito; binarium quoque similiter in singularis quarto. ... Quibus sumptis, statuatur alter duodenarius in primo tramite singularis et deceni per denominationes multiplicandus,...*“

sčítanec, k němuž budou připojovány další sčítance pro zjištění konečného součtu (viz obr. 2A).

C	X	I	C	X	I
				1	2
				1	2

A)

C	X	I	C	X	I
				1	2
				2	4
			1	2	
			1	4	4
				1	2

B)

C	X	I	C	X	I
				1	2
				4	4
			1	8	8
			4	4	
			1	2	8
				6	
			1	7	2
				1	4
				4	4
				1	2

C)

C	X	I	C	X	I
				1	2
			1	7	2
				2	8
				1	6
				4	
			1	4	
			2		
				7	8
			1	7	
				2	6
				1	
			1		6
				1	6
				7	3
			1	3	6
				2	8
			1	7	
				1	2
			1	3	6
				6	
			2	7	8
			1	7	2
				4	4
				1	2

D)

C	X	I	C	X	I
				1	2
				3	6
			7	3	
				1	2
				6	
			1	6	
			2		
				3	6
			4	3	
				6	2
			2	7	8
			1	7	2
				4	4
				1	2
			2	3	6
				7	2
			8	3	6
				3	2
			2	7	8
			1	7	2
				4	4
				1	2

E)

C	X	I	C	X	I
				8	3
			8	3	6
				7	2
			1	7	2
				4	4
				1	2
			2	6	3
				9	3
				3	3
			2	6	3
				2	3
			2	7	8
			1	7	2
				4	4
				5	3

F)

Obr. 2 – Berneliův příklad násobení na abaku.

Nyní lze obě dvanáctky použít jako zadání pro první násobení. Zatímco je jasné, že palác je jeden a má dvanáct oken, takže není nutné žádné násobení, při určení počtu kobereců v paláci je zapotřebí zjistit, kolik je $12 \cdot 12$. Postup je jednoduchý: $2 \cdot 2 = 4$ (tedy násobí se digitus násobitele s digitem násobence), a jelikož se násobily jednotky s jednotkami je digitus výsledku umístěn do prvního sloupce zprava (tj. řád jednotek) ve druhé (pracovní) části abaku. Poté vynásobíme $2 \cdot 1 = 2$ (nyní je násoben digitus násobitele s artikulem násobence). V tomto kroku se násobily jednotky s desítkami, digitus výsledku je tedy umístěn do sloupce desítek v pracovní (druhé) části abaku. Následně se násobí $1 \cdot 2 = 2$ (součin artikulu násobitele s digitem násobence), i tentokrát byl součin prováděn mezi jednotkami a desítkami, tudíž digitus výsledku musí být umístěn do řádu desítek v pracovní části početní tabule. Na závěr je nutno vynásobit $1 \cdot 1 = 1$ (artikulus násobitele a násobence), tzn. byly násobeny desítky

s desítkami, což automaticky posílá digitus výsledku do řádu stovek. V pracovní části abaku tak bude čtyřka v řádu jednotek; dvě dvojky pod sebou v řádu desítek, ty je nutno sečíst, načež zde zůstane rovněž čtyřka; a v řádu stovek je jednička. Tímto je zjištěn výsledek násobení $12 \cdot 12 = 144$, což odpovídá počtu koberců v zadaném příkladu (viz obr. 2B).⁶¹

Získaný výsledek se nyní přesune do horní části abaku a bude se opětovně násobit dvanáctkou. Postup je stejný, a tak Bernelius rovnou uvádí, že na těchto kobercích spočívá 1 728 mužů (viz obr. 2C). I nyní je výsledek přesunut do horní části abaku a znovu vynásoben dvanácti, čímž je vypočítán počet žen, kterých se v paláci nachází 20 736 (viz obr. 2D). Stejným způsobem je možno vyčíslit množství dětí na 248 832 (viz obr. 2E). Nyní již stačí sečíst palác (1), okna (12), koberce (144), muže (1 728), ženy (20 736) a děti (248 832) a získat výslednou hodnotu, tj. 271 453 (viz obr. 2F).⁶² Pro nás asi přehledněji by příklad mohl vypadat takto:

$$x = 1 + 12 + 12^2 + 12^3 + 12^4 + 12^5 = 1 + 12 + 144 + 1\,728 + 20\,736 + 248\,832 = 271\,453.$$

Velká početní tabule raně středověkého latinského abaku tedy umožňuje přehledně vypočítat uvedený příklad a Bernelius jako jediný z nejstarších abacistů uvádí, jak by se při tom mělo postupovat. Teprve s touto praktickou ukázkou lze názorně pochopit nejen jednotlivá pravidla, ale také celý proces násobení, jehož se abacista kolem roku 1000 držel.

Závěr

Ve svém souhrnu zkoumaná abacistická pojednání Gerberta z Aurillacu, Abbona z Fleury, Herigera z Lobbes a Bernelia mladšího z Paříže poskytují ucelený souhrn všech potřebných znalostí pro úspěšné násobení na nově užívané početní tabulce. Zatímco Gerbert a zejména Heriger se detailně zaměřili na jednotlivá pravidla násobení, tj. na umístění digitu a artikulu výsledku při násobení činitelů v různých desetinných řádech, tak především Bernelius uvádí takřka úplný výčet součinů digitů, které abacista při násobení nezbytně potřebuje, a také na příkladech s palácem přehledně ukazuje, jakými kroky by měl počtář projít, má-li se zdárně dostat výsledku. Abbo bezpochyby uměl na abaku násobit a lze předpokládat, že v praxi tyto úkony aktivně prováděl, ovšem celé jeho abacistické umění mělo vyloženě utilitární charakter. Právě proto jako jediný explicitně tematizuje asociativitu činitelů při součinu a jako příklady jednotlivých násobků jsou zvoleny hodnoty, které jsou potřebné pro komputistické výpočty.

Jistá obsahová podobnost Gerbertových a Herigerových *Regulí* (u opata z Lobbes je výčet pravidel jednak podrobnější, jednak nabízí i vysvětlení pojmů digitus a artikus, a rovněž nezapomíná na nekonečnou řadu čísel, kterou však abacista na své sedmadvacetisloupcové pomůcce pro celá čísla nemůže zohlednit) naznačuje, že oba psali své traktáty pro čtenáře, kteří se orientovali v matematických tématech, dost možná již na klášterním abaku počítali, tudíž jim poskytuje pouze přehledný návod pro umístění symbolů čísel na početní tabulku. Oproti tomu Abbonovy texty jsou určeny pro celkové seznámení se s číselnými operacemi a jejich praktickou aplikaci při určování dat Velikonoc apod. Berneliovo pojednání je pak

⁶¹ *Ibid.*: „... bis duo, IIII; in secundo singularis tramite. Quemcumque enim singularis multiplicat, in eodem ponit digitum quem multiplicat. Bis unus, II; in deceni secundo. Semel duo, in eiusdem eodem, II. Quemcumque enim decenus multiplicat, in secundo ab illo ponit digitum. Semel unus in centeni secundo, unus. Duodecim igitur fenestras in se ductas, CXLIII stratus reddent sua incursione.“

⁶² *Ibid.*: „Quos si a secundo in primo tramite loces, eisdem denominationibus modo simili multiplicandos, habebis horum incursione I.DCCXXVIII uiros. Quibus simili modo permutatis eisdemque denominationibus multiplicatis, reddetur mulierum numerus XX.DCCXXXVI. Quibus simili modo diductis, habebitur numerus infantium CCXLVIII.DCCCXXXII. Quibus omnibus in unum redactis turris, fenestrarum, stratum, uirorum quoque ac mulierum nec non infantium reddetur numerus CCLXXI.CCCCLIII.“

přehledným učebnicovým manuálem, který uvádí vše potřebné i pro čtenáře, který má jen rudimentární znalosti aritmetiky, a proto se potřebuje zorientovat v celém procesu násobení na abaku. Již toto odlišné zaměření jednotlivých textů, které vznikly před a kolem roku 1000, poskytuje většinu možných odpovědí na nestejnou podobu těchto děl.

PŘÍLOHY

PŘÍLOHA A

HERIGERUS LOBIENSIS, *REGULA DE ABACO COMPUTI*⁶³

I.

Multiplicatio singularium

quorum multiplicatores in sua sede constituunt digitos et in secundo a se loco mittunt articulos.

Horum species sunt XXV.

- [1] *Singularem per decenum si multiplicaveris, dabis digitis X et articulis centum.*
- [2] *Singularem per centum si multiplicaveris, dabis digitis centum et articulis mille.*
- [3] *Singularem per millenum si multiplicaveris, dabis digitis mille et articulis X̄.*
- [4] *Singularem per decenum millenum si multiplicaveris, dabis digitis X̄ et articulis C̄.*
- [5] *Singularem per centenum millenum si multiplicaveris, dabis digitis C̄ et articulis Ī M̄.*
- [6] *Singularem per Ī M̄ vel X̄ C̄ si multiplicaveris, dabis digitis Ī M̄ et articulis X̄ Ī M̄.*
- [7] *Singularem per X̄ Ī M̄ vel C̄ C̄ si multiplicaveris, dabis digitis X̄ Ī M̄ et articulis C̄ Ī M̄.*
- [8] *Singularem per C̄ Ī M̄ vel Ī C̄ si multiplicaveris, dabis digitis C̄ Ī M̄ et articulis M̄ Ī M̄.*
- [9] *Singularem per M̄ Ī M̄ vel X̄ C̄ si multiplicaveris, dabis digitis M̄ Ī M̄ et articulis X̄ Ī M̄.*
- [10] *Singularem per X̄ M̄ M̄ vel C̄ C̄ si multiplicaveris, dabis digitis X̄ M̄ M̄ et articulis C̄ M̄ M̄.*

Násobení jednotek,

při němž digity zůstávají ve stejném sloupci jako je násobitel a artikuly se posouvají o jeden sloupec od něj.

Těchto případů je 25.

- [1] *Pokud násobíš jednotky desítkami, umístíš digity do desítek a artikuly do stovek.*
- [2] *Pokud násobíš jednotky stovkami, umístíš digity do stovek a artikuly do tisíců.*
- [3] *Pokud násobíš jednotky tisíci, umístíš digity do tisíců a artikuly do desítek tisíců.*
- [4] *Pokud násobíš jednotky desítkami tisíců, umístíš digity do desítek tisíců a artikuly do stovek tisíců.*
- [5] *Pokud násobíš jednotky stovkami tisíců, umístíš digity do stovek tisíců a artikuly do milionů.*
- [6] *Pokud násobíš jednotky miliony, tedy desítkami statisíců, umístíš digity do milionů a artikuly do desítek milionů.*
- [7] *Pokud násobíš jednotky desítkami milionů, tedy stovkami statisíců, umístíš digity do desítek milionů a artikuly do stovek milionů.*
- [8] *Pokud násobíš jednotky stovkami miliónů, tedy tisíci statisíců, umístíš digity do stovek miliónů a artikuly do miliard.*
- [9] *Pokud násobíš jednotky miliardami, tedy desítkami tisíců statisíců, umístíš digity do miliard a artikuly do desítek miliard.*
- [10] *Pokud násobíš jednotky desítkami miliard, tedy stovkami tisíců statisíců,*

⁶³ Herigerus, *Regulae O*, s. 311–324.

- [11] *Singularem per $\bar{C} \bar{M} \bar{M}$ vel $\bar{I} \bar{M} \bar{C}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{C} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.* *umístíš digity do desítek miliard a artikuly do stovek miliard.*
- [12] *Singularem per $\bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $X \bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{M}$.* [11] *Pokud násobíš jednotky stovkami miliard, tedy miliony statisíců, umístíš digity do stovek miliard a artikuly do bilionů.*
- [13] *Singularem per $X \bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $X \bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $C \bar{I} \bar{M} \bar{I} \bar{M}$.* [12] *Pokud násobíš jednotky biliony, umístíš digity do bilionů a artikuly do desítek bilionů.*
- [14] *Singularem per $C \bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $C \bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{M}$.* [13] *Pokud násobíš jednotky desítkami bilionů, umístíš digity do desítek bilionů a artikuly do stovek bilionů.*
- [15] *Singularem per $\bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{X} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.* [14] *Pokud násobíš jednotky stovkami bilionů, umístíš digity do stovek bilionů a artikuly do biliard.*
- [16] *Singularem per $\bar{X} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{X} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{C} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.* [15] *Pokud násobíš jednotky biliardami, umístíš digity do biliard a artikuly do desítek biliard.*
- [17] *Singularem per $\bar{C} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{C} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.* [16] *Pokud násobíš jednotky desítkami biliard, umístíš digity do desítek biliard a artikuly do stovek biliard.*
- [18] *Singularem per $\bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $X \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.* [17] *Pokud násobíš jednotky stovkami biliard, umístíš digity do stovek biliard a artikuly do trilionů.*
- [19] *Singularem per $X \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $X \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $C \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.* [18] *Pokud násobíš jednotky triliony, umístíš digity do trilionů a artikuly do desítek trilionů.*
- [20] *Singularem per $C \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $C \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{M} \bar{M}$.* [19] *Pokud násobíš jednotky desítkami trilionů, umístíš digity do desítek trilionů a artikuly do stovek trilionů.*
- [21] *Singularem per $\bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{X} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.* [20] *Pokud násobíš jednotky stovkami trilionů, umístíš digity do stovek trilionů a artikuly do triliard.*
- [22] *Singularem per $\bar{X} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{X} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{C} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.* [21] *Pokud násobíš jednotky triliardami, umístíš digity do triliard a artikuly do desítek triliard.*
- [23] *Singularem per $\bar{C} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{C} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.* [22] *Pokud násobíš jednotky desítkami triliard, umístíš digity do desítek triliard a artikuly do stovek triliard.*
- [23] *Pokud násobíš jednotky stovkami triliard, umístíš digity do stovek triliard a artikuly do kvadrilionů.*

- [24] *Singularem per $\bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M} \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M} \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$ et articulis $X \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M} \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$.*
- [25] *Singularem per $X \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M} \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $X \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M} \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$ et articulis $C \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M} \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$.*

Multiplicatio deceni

per se et per sequentes ubi multiplicatores ejus digitos secundo a se loco tertio articulos componunt.

Species XXIV.

- [26] *Decenum per X si multiplicaveris, dabis digitis C et articulis mille.*
- [27] *Decenum per C si multiplicaveris, dabis digitis \bar{M} et articulis \bar{X} .*
- [28] *Decenum per \bar{M} si multiplicaveris, dabis digitis \bar{X} et articulis \bar{C} .*
- [29] *Decenum per \bar{X} si multiplicaveris, dabis digitis \bar{C} et articulis $\bar{M}\bar{M}$.*
- [30] *Decenum per \bar{C} si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{M}\bar{M}$ et articulis $X \bar{M}\bar{M}$.*
- [31] *Decenum per $\bar{I} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $X \bar{M}\bar{M}$ et articulis $C \bar{M}\bar{M}$.*
- [32] *Decenum per $X \bar{I} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $C \bar{M}\bar{M}$ et articulis $\bar{M} \bar{M}\bar{M}$.*
- [33] *Decenum per $C \bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{I} \bar{M}\bar{M}$ et articulis $\bar{X} \bar{M}\bar{M}$.*
- [34] *Decenum per $\bar{I} \bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{X} \bar{M}\bar{M}$ et articulis $\bar{C} \bar{M}\bar{M}$.*
- [35] *Decenum per $\bar{X} \bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{C} \bar{M}\bar{M}$ et articulis $\bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$.*

- [24] *Pokud násobíš jednotky kvadriliony, umístíš digity do kvadrilionů a artikuly do desítek kvadrilionů.*
- [25] *Pokud násobíš jednotky desítkami kvadrilionů, umístíš digity do desítek kvadrilionů a artikuly do stovek kvadrilionů.*

Násobení desítek

desítkami a dalšími řády, při němž se digity posouvají o jedno a artikuly o dva sloupce od násobitele.

24 případů.

- [26] *Pokud násobíš desítky desítkami, umístíš digity do stovek a artikuly do tisíců.*
- [27] *Pokud násobíš desítky stovkami, umístíš digity do tisíců a artikuly do desítek tisíců.*
- [28] *Pokud násobíš desítky tisíci, umístíš digity do desítek tisíců a artikuly do stovek tisíců.*
- [29] *Pokud násobíš desítky desítkami tisíci, umístíš digity do stovek tisíců a artikuly do milionů.*
- [30] *Pokud násobíš desítky stovkami tisíců, umístíš digity do milionů a artikuly do desítek milionů.*
- [31] *Pokud násobíš desítky miliony, umístíš digity do desítek milionů a artikuly do stovek milionů.*
- [32] *Pokud násobíš desítky desítkami miliony, umístíš digity do stovek miliónů a artikuly do miliard.*
- [33] *Pokud násobíš desítky stovkami miliónů, umístíš digity do miliard a artikuly do desítek miliard.*
- [34] *Pokud násobíš desítky miliardami, umístíš digity do desítek miliard a artikuly do stovek miliard.*
- [35] *Pokud násobíš desítky desítkami miliard, umístíš digity do stovek miliard a artikuly do bilionů.*

- [36] *Decenum per $\bar{C} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $X \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.* [36] *Pokud násobíš desítky stovkami miliard, umístíš digity do bilionů a artikuly do desítek bilionů.*
- [37] *Decenum per $\bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $X \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $C \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.* [37] *Pokud násobíš desítky biliony, umístíš digity do desítek bilionů a artikuly do stovek bilionů.*
- [38] *Decenum per $X \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $C \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.* [38] *Pokud násobíš desítky desítkami bilionů, umístíš digity do stovek bilionů a artikuly do biliard.*
- [39] *Decenum per $C \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{X} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.* [39] *Pokud násobíš desítky stovkami bilionů, umístíš digity do biliard a artikuly do desítek biliard.*
- [40] *Decenum per $\bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{X} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{C} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.* [40] *Pokud násobíš desítky biliardami, umístíš digity do desítek biliard a artikuly do stovek biliard.*
- [41] *Decenum per $\bar{X} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{C} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.* [41] *Pokud násobíš desítky desítkami miliard, umístíš digity do stovek biliard a artikuly do trilionů.*
- [42] *Decenum per $\bar{C} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $X \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.* [42] *Pokud násobíš desítky stovkami biliard, umístíš digity do trilionů a artikuly do desítek trilionů.*
- [43] *Decenum per $\bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $X \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $C \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.* [43] *Pokud násobíš desítky triliony, umístíš digity do desítek trilionů a artikuly do stovek trilionů.*
- [44] *Decenum per $X \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $C \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.* [44] *Pokud násobíš desítky desítkami trilionů, umístíš digity do stovek trilionů a artikuly do triliard.*
- [45] *Decenum per $C \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{X} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.* [45] *Pokud násobíš desítky stovkami trilionů, umístíš digity do triliard a artikuly do desítek triliard.*
- [46] *Decenum per $\bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{X} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{C} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.* [46] *Pokud násobíš desítky triliardami, umístíš digity do desítek triliard a artikuly do stovek triliard.*
- [47] *Decenum per $\bar{X} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{C} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.* [47] *Pokud násobíš desítky desítkami triliard, umístíš digity do stovek triliard a artikuly do kvadrilionů.*

[48] *Decenum per \bar{C} $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ et articulis X $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$.*

[49] *Decenum per $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis X $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ et articulis C $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$.*

Multiplicatio centeni

ubi multiplicatores ejus tertio a se loco digitos et quarto mittunt articulos.

Species XXII.

[50] *Centenum per centenum si multiplicaveris, dabis digitis \bar{X} et articulis \bar{C} .*

[51] *Centenum per \bar{M} si multiplicaveris, dabis digitis \bar{C} et articulis $\bar{M}\bar{M}$.*

[52] *Centenum per \bar{X} si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{M}\bar{M}$ et articulis X $\bar{M}\bar{M}$.*

[53] *Centenum per \bar{C} si multiplicaveris, dabis digitis X $\bar{M}\bar{M}$ et articulis C $\bar{M}\bar{M}$.*

[54] *Centenum per \bar{I} \bar{M} si multiplicaveris, dabis digitis C $\bar{M}\bar{M}$ et articulis \bar{I} $\bar{M}\bar{M}$.*

[55] *Centenum per X \bar{I} \bar{M} si multiplicaveris, dabis digitis \bar{I} $\bar{M}\bar{M}$ et articulis \bar{X} $\bar{M}\bar{M}$.*

[56] *Centenum per C \bar{I} \bar{M} si multiplicaveris, dabis digitis \bar{X} $\bar{M}\bar{M}$ et articulis \bar{C} $\bar{M}\bar{M}$.*

[57] *Centenum per \bar{I} $\bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis \bar{C} $\bar{M}\bar{M}$ et articulis $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$.*

[58] *Centenum per \bar{X} $\bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ et articulis X $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$.*

[59] *Centenum per \bar{C} $\bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis X $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ et articulis C $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$.*

[60] *Centenum per $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis C $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ et articulis \bar{M} $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$.*

[48] *Pokud násobíš desítky stovkami triliard, umístíš digity do kvadrilionů a artikuly do desítek kvadrilionů.*

[49] *Pokud násobíš desítky kvadriliony, umístíš digity do desítek kvadrilionů a artikuly do stovek kvadrilionů.*

Násobení stovek,

při němž se digity posouvají o dva a artikuly o tři sloupce od násobitele.

22 případů.

[50] *Pokud násobíš stovky stovkami, umístíš digity do desítek tisíců a artikuly do stovek tisíců.*

[51] *Pokud násobíš stovky tisíce, umístíš digity do stovek tisíců a artikuly do milionů.*

[52] *Pokud násobíš stovky desítkami tisíců, umístíš digity do milionů a artikuly do desítek milionů.*

[53] *Pokud násobíš stovky stovkami tisíců, umístíš digity do desítek milionů a artikuly do stovek milionů.*

[54] *Pokud násobíš stovky miliony, umístíš digity do stovek milionů a artikuly do miliard.*

[55] *Pokud násobíš stovky desítkami milionů, umístíš digity do miliard a artikuly do desítek miliard.*

[56] *Pokud násobíš stovky stovkami miliónů, umístíš digity do desítek miliard a artikuly do stovek miliard.*

[57] *Pokud násobíš stovky miliardami, umístíš digity do stovek miliard a artikuly do bilionů.*

[58] *Pokud násobíš stovky desítkami miliard, umístíš digity do bilionů a artikuly do desítek bilionů.*

[59] *Pokud násobíš stovky stovkami miliard, umístíš digity do desítek bilionů a artikuly do stovek bilionů.*

[60] *Pokud násobíš stovky biliony, umístíš digity do stovek bilionů a artikuly do biliard.*

- [61] *Centenum per X $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis \bar{M} $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ et articulis \bar{X} $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$.*
- [62] *Centenum per C $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis \bar{X} $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ et articulis \bar{C} $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$.*
- [63] *Centenum per \bar{M} $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis \bar{C} $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ et articulis $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$.*
- [64] *Centenum per \bar{X} $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ et articulis X $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$.*
- [65] *Centenum per \bar{C} $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis X $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ et articulis C $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$.*
- [66] *Centenum per $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis C $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ et articulis \bar{I} $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$.*
- [67] *Centenum per X $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis \bar{I} $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ et articulis \bar{X} $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$.*
- [68] *Centenum per C $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis \bar{X} $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ et articulis \bar{C} $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$.*
- [69] *Centenum per \bar{I} $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis \bar{C} $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ et articulis $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$.*
- [70] *Centenum per \bar{X} $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ et articulis X $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$.*
- [71] *Centenum per \bar{C} $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis X $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ et articulis C $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$.*
- [61] *Pokud násobíš stovky desítkami bilionů, umístíš digity do biliard a artikuly do desítek biliard.*
- [62] *Pokud násobíš stovky stovkami bilionů, umístíš digity do desítek biliard a artikuly do stovek biliard.*
- [63] *Pokud násobíš stovky biliardami, umístíš digity do stovek biliard a artikuly do trilionů.*
- [64] *Pokud násobíš stovky desítkami biliard, umístíš digity do trilionů a artikuly do desítek trilionů.*
- [65] *Pokud násobíš stovky stovkami biliard, umístíš digity do desítek trilionů a artikuly do stovek trilionů.*
- [66] *Pokud násobíš stovky triliony, umístíš digity do stovek trilionů a artikuly do triliard.*
- [67] *Pokud násobíš stovky desítkami trilionů, umístíš digity do triliard a artikuly do desítek triliard.*
- [68] *Pokud násobíš stovky stovkami trilionů, umístíš digity do desítek triliard a artikuly do stovek triliard.*
- [69] *Pokud násobíš stovky triliardami, umístíš digity do stovek triliard a artikuly do kvadrilionů.*
- [70] *Pokud násobíš stovky desítkami triliard, umístíš digity do kvadrilionů a artikuly do desítek kvadrilionů.*
- [71] *Pokud násobíš stovky stovkami triliard, umístíš digity do desítek kvadrilionů a artikuly do stovek kvadrilionů.*

Násobení tisíců,

při němž se digity posouvají o tři a artikuly o čtyři sloupce od násobitele.

Multiplicatio milleni

cujus multiplicatores in quarto a se loco digitos et quinto articulos mittunt.

Species XX.

- [72] *Millenum per \bar{M} si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{M}\bar{M}$ et articulis $X \bar{M}\bar{M}$.*
- [73] *Millenum per \bar{X} si multiplicaveris, dabis digitis $X \bar{M}\bar{M}$ et articulis $C \bar{M}\bar{M}$.*
- [74] *Millenum per \bar{C} si multiplicaveris, dabis digitis $C \bar{M}\bar{M}$ et articulis $\bar{I} \bar{M}\bar{M}$.*
- [75] *Millenum per $\bar{I} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{I} \bar{M}\bar{M}$ et articulis $\bar{X} \bar{M}\bar{M}$.*
- [76] *Millenum per $X \bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{X} \bar{M}\bar{M}$ et articulis $\bar{C} \bar{M}\bar{M}$.*
- [77] *Millenum per $C \bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{C} \bar{M}\bar{M}$ et articulis $\bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$.*
- [78] *Millenum per $\bar{I} \bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$ et articulis $X \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$.*
- [79] *Millenum per $\bar{X} \bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $X \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$ et articulis $C \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$.*
- [80] *Millenum per $\bar{C} \bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $C \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$ et articulis $\bar{M} \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$.*
- [81] *Millenum per $\bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{M} \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$ et articulis $\bar{X} \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$.*
- [82] *Millenum per $X \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{X} \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$ et articulis $\bar{C} \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$.*
- [83] *Millenum per $C \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{C} \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$ et articulis $\bar{M}\bar{M} \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$.*
- [84] *Millenum per $\bar{M} \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{M}\bar{M} \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$ et articulis $X \bar{M}\bar{M} \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$.*
- [85] *Millenum per $\bar{X} \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $X \bar{M}\bar{M} \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$ et articulis $C \bar{M}\bar{M} \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$.*

20 případů.

- [72] *Pokud násobíš tisíce tisíci, umístíš digity do milionů a artikuly do desítek milionů.*
- [73] *Pokud násobíš tisíce desítkami tisíců, umístíš digity do desítek milionů a artikuly do stovek milionů.*
- [74] *Pokud násobíš tisíce stovkami tisíců, umístíš digity do stovek milionů a artikuly do miliard.*
- [75] *Pokud násobíš tisíce miliony, umístíš digity do miliard a artikuly do desítek miliard.*
- [76] *Pokud násobíš tisíce desítkami milionů, umístíš digity do desítek miliard a artikuly do stovek miliard.*
- [77] *Pokud násobíš tisíce stovkami milionů, umístíš digity do stovek miliard a artikuly do bilionů.*
- [78] *Pokud násobíš tisíce miliardami, umístíš digity do bilionů a artikuly do desítek bilionů.*
- [79] *Pokud násobíš tisíce desítkami miliard, umístíš digity do desítek bilionů a artikuly do stovek bilionů.*
- [80] *Pokud násobíš tisíce stovkami miliard, umístíš digity do stovek bilionů a artikuly do biliard.*
- [81] *Pokud násobíš tisíce biliony, umístíš digity do biliard a artikuly do desítek biliard.*
- [82] *Pokud násobíš tisíce desítkami bilionů, umístíš digity do desítek biliard a artikuly do stovek biliard.*
- [83] *Pokud násobíš tisíce stovkami bilionů, umístíš digity do stovek biliard a artikuly do trilionů.*
- [84] *Pokud násobíš tisíce biliardami, umístíš digity do trilionů a artikuly do desítek trilionů.*
- [85] *Pokud násobíš tisíce desítkami biliard, umístíš digity do desítek trilionů a artikuly do stovek trilionů.*

- [86] *Millenum per \bar{C} $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis C $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ et articulis \bar{I} $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$.*
- [87] *Millenum per $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis \bar{I} $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ et articulis \bar{X} $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$.*
- [88] *Millenum per X $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis \bar{X} $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ et articulis \bar{C} $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$.*
- [89] *Millenum per C $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis \bar{C} $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ et articulis $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$.*
- [90] *Millenum per \bar{I} $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ et articulis X $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$.*
- [91] *Millenum per \bar{X} $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis X $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ et articulis C $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$.*
- [86] *Pokud násobíš tisíce stovkami biliard, umístíš digity do stovek trilionů a artikuly do triliard.*
- [87] *Pokud násobíš tisíce triliony, umístíš digity do triliard a artikuly do desítek triliard.*
- [88] *Pokud násobíš tisíce desítkami trilionů, umístíš digity do desítek triliard a artikuly do stovek triliard.*
- [89] *Pokud násobíš tisíce stovkami trilionů, umístíš digity do stovek triliard a artikuly do kvadrilionů.*
- [90] *Pokud násobíš tisíce triliardami, umístíš digity do kvadrilionů a artikuly do desítek kvadrilionů.*
- [91] *Pokud násobíš tisíce desítkami triliard, umístíš digity do desítek kvadrilionů a artikuly do stovek kvadrilionů.*

Multiplicatio deceni milleni

cujus multiplicatores digitos in quinto a se loco et articulos in sexto ponunt.

Species XVIII.

- [92] *Decenum millenum per \bar{X} si multiplicaveris, dabis digitis C $\bar{M}\bar{M}$ et articulis \bar{I} $\bar{M}\bar{M}$.*
- [93] *\bar{X} per \bar{C} si multiplicaveris, dabis digitis \bar{I} $\bar{M}\bar{M}$ et articulis \bar{X} $\bar{M}\bar{M}$.*
- [94] *\bar{X} per $\bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis \bar{X} $\bar{M}\bar{M}$ et articulis \bar{C} $\bar{M}\bar{M}$.*
- [95] *\bar{X} per X \bar{I} \bar{M} si multiplicaveris, dabis digitis \bar{C} $\bar{M}\bar{M}$ et articulis $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$.*
- [96] *\bar{X} per C \bar{I} \bar{M} si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$ et articulis X $\bar{I}\bar{I}$ $\bar{M}\bar{M}$.*
- Násobení desítek tisíců,**
při němž se digity posouvají o čtyři a artikuly o pět sloupců od násobitele.
18 případů.
- [92] *Pokud násobíš desítky tisíců desítkami tisíců, umístíš digity do stovek miliónů a artikuly do miliard.*
- [93] *Pokud násobíš desítky tisíců stovkami tisíců, umístíš digity do miliard a artikuly do desítek miliard.*
- [94] *Pokud násobíš desítky tisíců miliony, umístíš digity do desítek miliard a artikuly do stovek miliard.*
- [95] *Pokud násobíš desítky tisíců desítkami miliónů, umístíš digity do stovek miliard a artikuly do bilionů.*
- [96] *Pokud násobíš desítky tisíců stovkami miliónů, umístíš digity do bilionů a artikuly do desítek bilionů.*

- [97] \bar{X} per $\bar{I}\bar{I}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $X\bar{I}\bar{I}\bar{M}\bar{M}$ et articulis $C\bar{I}\bar{I}\bar{M}\bar{M}$.
- [98] \bar{X} per $\bar{X}\bar{I}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $C\bar{I}\bar{I}\bar{M}\bar{M}$ et articulis $\bar{M}\bar{I}\bar{I}\bar{M}\bar{M}$.
- [99] \bar{X} per $\bar{C}\bar{I}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{M}\bar{I}\bar{I}\bar{M}\bar{M}$ et articulis $\bar{X}\bar{I}\bar{I}\bar{M}\bar{M}$.
- [100] \bar{X} per $\bar{I}\bar{I}\bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{X}\bar{I}\bar{I}\bar{M}\bar{M}$ et articulis $\bar{C}\bar{I}\bar{I}\bar{M}\bar{M}$.
- [101] \bar{X} per $X\bar{I}\bar{I}\bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{C}\bar{I}\bar{I}\bar{M}\bar{M}$ et articulis $\bar{M}\bar{M}\bar{I}\bar{I}\bar{M}\bar{M}$.
- [102] \bar{X} per $C\bar{I}\bar{I}\bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{M}\bar{M}\bar{I}\bar{I}\bar{M}\bar{M}$ et articulis $X\bar{M}\bar{M}\bar{I}\bar{I}\bar{M}\bar{M}$.
- [103] \bar{X} per $\bar{M}\bar{I}\bar{I}\bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $X\bar{M}\bar{M}\bar{I}\bar{I}\bar{M}\bar{M}$ et articulis $C\bar{M}\bar{M}\bar{I}\bar{I}\bar{M}\bar{M}$.
- [104] \bar{X} per $\bar{X}\bar{I}\bar{I}\bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $C\bar{M}\bar{M}\bar{I}\bar{I}\bar{M}\bar{M}$ et articulis $\bar{I}\bar{M}\bar{M}\bar{I}\bar{I}\bar{M}\bar{M}$.
- [105] \bar{X} per $\bar{C}\bar{I}\bar{I}\bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{I}\bar{M}\bar{M}\bar{I}\bar{I}\bar{M}\bar{M}$ et articulis $\bar{X}\bar{M}\bar{M}\bar{I}\bar{I}\bar{M}\bar{M}$.
- [106] \bar{X} per $\bar{M}\bar{M}\bar{I}\bar{I}\bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{X}\bar{M}\bar{M}\bar{I}\bar{I}\bar{M}\bar{M}$ et articulis $\bar{C}\bar{M}\bar{M}\bar{I}\bar{I}\bar{M}\bar{M}$.
- [107] \bar{X} per $X\bar{M}\bar{M}\bar{I}\bar{I}\bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{C}\bar{M}\bar{M}\bar{I}\bar{I}\bar{M}\bar{M}$ et articulis $\bar{I}\bar{I}\bar{M}\bar{M}\bar{I}\bar{I}\bar{M}\bar{M}$.
- [108] \bar{X} per $C\bar{M}\bar{M}\bar{I}\bar{I}\bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{I}\bar{I}\bar{M}\bar{M}\bar{I}\bar{I}\bar{M}\bar{M}$ et articulis $X\bar{I}\bar{I}\bar{M}\bar{M}\bar{I}\bar{I}\bar{M}\bar{M}$.
- [109] \bar{X} per $\bar{I}\bar{M}\bar{M}\bar{I}\bar{I}\bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $X\bar{I}\bar{I}\bar{M}\bar{M}\bar{I}\bar{I}\bar{M}\bar{M}$ et articulis $C\bar{I}\bar{I}\bar{M}\bar{M}\bar{I}\bar{I}\bar{M}\bar{M}$.
- [97] Pokud násobíš desítky tisíců miliardami, umístíš digity do desítek bilionů a artikuly do stovek bilionů.
- [98] Pokud násobíš desítky tisíců desítkami miliard, umístíš digity do stovek bilionů a artikuly do biliard.
- [99] Pokud násobíš desítky tisíců stovkami miliard, umístíš digity do biliard a artikuly do desítek biliard.
- [100] Pokud násobíš desítky tisíců biliony, umístíš digity do desítek biliard a artikuly do stovek biliard.
- [101] Pokud násobíš desítky tisíců desítkami bilionů, umístíš digity do stovek biliard a artikuly do trilionů.
- [102] Pokud násobíš desítky tisíců stovkami bilionů, umístíš digity do trilionů a artikuly do desítek trilionů.
- [103] Pokud násobíš desítky tisíců biliardami, umístíš digity do desítek trilionů a artikuly do stovek trilionů.
- [104] Pokud násobíš desítky tisíců desítkami biliard, umístíš digity do stovek trilionů a artikuly do triliard.
- [105] Pokud násobíš desítky tisíců stovkami biliard, umístíš digity do triliard a artikuly do desítek triliard.
- [106] Pokud násobíš desítky tisíců triliony, umístíš digity do desítek triliard a artikuly do stovek triliard.
- [107] Pokud násobíš desítky tisíců desítkami trilionů, umístíš digity do stovek triliard a artikuly do kvadrilionů.
- [108] Pokud násobíš desítky tisíců stovkami trilionů, umístíš digity do kvadrilionů a artikuly do desítek kvadrilionů.
- [109] Pokud násobíš tisíce triliardami, umístíš digity do desítek kvadrilionů a artikuly do stovek kvadrilionů.

Multiplicatio centeni milleni

cujus multiplicatores VI a se loco digitos et VII mittunt articulos.

Species XVI.

Násobení stovek tisíců,

při němž se digity posouvají o pět a artikuly o šest sloupců od násobitele.

16 případů.

- [110] *Centenum millenum per \bar{C} si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{X} \bar{M}\bar{M}$ et articulis $\bar{C} \bar{M}\bar{M}$.*
- [111] *\bar{C} per $\bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{C} \bar{M}\bar{M}$ et articulis $\bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$.*
- [112] *\bar{C} per $X \bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$ et articulis $X \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$.*
- [113] *\bar{C} per $C \bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $X \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$ et articulis $C \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$.*
- [114] *\bar{C} per $\bar{I} \bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $C \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$ et articulis $\bar{M} \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$.*
- [115] *\bar{C} per $\bar{X} \bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{M} \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$ et articulis $\bar{X} \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$.*
- [116] *\bar{C} per $\bar{C} \bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{X} \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$ et articulis $\bar{C} \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$.*
- [117] *\bar{C} per $\bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{C} \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$ et articulis $\bar{M}\bar{M} \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$.*
- [118] *\bar{C} per $X \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{M}\bar{M} \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$ et articulis $X \bar{M}\bar{M} \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$.*
- [119] *\bar{C} per $C \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $X \bar{M}\bar{M} \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$ et articulis $C \bar{M}\bar{M} \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$.*
- [120] *\bar{C} per $\bar{M} \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $C \bar{M}\bar{M} \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$ et articulis $\bar{I} \bar{M}\bar{M} \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$.*
- [121] *\bar{C} per $\bar{X} \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{I} \bar{M}\bar{M} \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$ et articulis $\bar{X} \bar{M}\bar{M} \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$.*
- [122] *\bar{C} per $\bar{C} \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{X} \bar{M}\bar{M} \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$ et articulis $\bar{C} \bar{M}\bar{M} \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$.*
- [123] *\bar{C} per $\bar{M}\bar{M} \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{C} \bar{M}\bar{M} \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$ et articulis $\bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M} \bar{I}\bar{I} \bar{M}\bar{M}$.*
- [110] *Pokud násobíš stovky tisíců stovkami tisíců, umístíš digity do desítek miliard a artikuly do stovek miliard.*
- [111] *Pokud násobíš stovky tisíců miliony, umístíš digity do stovek miliard a artikuly do bilionů.*
- [112] *Pokud násobíš stovky tisíců desítkami milionů, umístíš digity do bilionů a artikuly do desítek bilionů.*
- [113] *Pokud násobíš stovky tisíců stovkami miliónů, umístíš digity do desítek bilionů a artikuly do stovek bilionů.*
- [114] *Pokud násobíš stovky tisíců miliardami, umístíš digity do stovek bilionů a artikuly do biliard.*
- [115] *Pokud násobíš stovky tisíců desítkami miliard, umístíš digity do biliard a artikuly do desítek biliard.*
- [116] *Pokud násobíš stovky tisíců stovkami miliard, umístíš digity do desítek biliard a artikuly do stovek biliard.*
- [117] *Pokud násobíš stovky tisíců biliony, umístíš digity do stovek biliard a artikuly do trilionů.*
- [118] *Pokud násobíš stovky tisíců desítkami bilionů, umístíš digity do trilionů a artikuly do desítek trilionů.*
- [119] *Pokud násobíš stovky tisíců stovkami bilionů, umístíš digity do desítek trilionů a artikuly do stovek trilionů.*
- [120] *Pokud násobíš stovky tisíců biliardami, umístíš digity do stovek trilionů a artikuly do triliard.*
- [121] *Pokud násobíš stovky tisíců desítkami biliard, umístíš digity do triliard a artikuly do desítek triliard.*
- [122] *Pokud násobíš stovky tisíců stovkami biliard, umístíš digity do desítek triliard a artikuly do stovek triliard.*
- [123] *Pokud násobíš stovky tisíců triliony, umístíš digity do stovek triliard a artikuly do kvadrilionů.*

[124] \bar{C} per $X \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $X \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.

[125] \bar{C} per $C \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $X \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $C \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.

Multiplicatio decies centeni milleni vel milies milleni

cujus multiplicatores VII a se loco digitos et VIII mittunt articulos.

Species XIV.

[126] $X \bar{C}$ vel $\bar{I} \bar{M}$ per $\bar{I} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $X \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.

[127] $\bar{I} \bar{M}$ per $X \bar{I} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $X \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $C \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.

[128] $\bar{I} \bar{M}$ per $C \bar{I} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $C \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.

[129] $\bar{I} \bar{M}$ per $\bar{I} \bar{I} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{X} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.

[130] $\bar{I} \bar{M}$ per $\bar{X} \bar{I} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{X} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{C} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.

[131] $\bar{I} \bar{M}$ per $\bar{C} \bar{I} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{C} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.

[132] $\bar{I} \bar{M}$ per $\bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $X \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.

[133] $\bar{I} \bar{M}$ per $X \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $X \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $C \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.

[134] $\bar{I} \bar{M}$ per $C \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $C \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.

[135] $\bar{I} \bar{M}$ per $\bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{X} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.

[124] Pokud násobíš stovky tisíců desítkami trilionů, umístíš digity do kvadrilionů a artikuly do desítek kvadrilionů.

[125] Pokud násobíš stovky tisíců stovkami trilionů, umístíš digity do desítek kvadrilionů a artikuly do stovek kvadrilionů.

Násobení desítek statisíců čili milionů,

při němž se digity posouvají o šest a artikuly o sedm sloupců od násobitele.

14 případů.

[126] Pokud násobíš desítky statisíců, tedy miliony, umístíš digity do bilionů a artikuly do desítek bilionů.

[127] Pokud násobíš miliony desítkami milionů, umístíš digity do desítek bilionů a artikuly do stovek bilionů.

[128] Pokud násobíš miliony stovkami miliónů, umístíš digity do stovek bilionů a artikuly do biliard.

[129] Pokud násobíš miliony miliardami, umístíš digity do biliard a artikuly do desítek biliard.

[130] Pokud násobíš miliony desítkami miliard, umístíš digity do desítek biliard a artikuly do stovek biliard.

[131] Pokud násobíš miliony stovkami miliard, umístíš digity do stovek biliard a artikuly do trilionů.

[132] Pokud násobíš miliony biliony, umístíš digity do trilionů a artikuly do desítek trilionů.

[133] Pokud násobíš miliony desítkami bilionů, umístíš digity do desítek trilionů a artikuly do stovek trilionů.

[134] Pokud násobíš miliony stovkami bilionů, umístíš digity do stovek trilionů a artikuly do triliard.

[135] Pokud násobíš miliony biliardami, umístíš digity do triliard a artikuly do desítek triliard.

- [136] $\bar{I} \bar{M}$ per $\bar{X} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{X} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{C} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.
- [137] $\bar{I} \bar{M}$ per $\bar{C} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{C} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.
- [138] $\bar{I} \bar{M}$ per $\bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $X \bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.
- [139] $\bar{I} \bar{M}$ per $X \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $X \bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $C \bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.

Multiplicatio decies milies milleni vel centies centeni milleni

cujus multiplicatores octavo a se loco digitos et nono mittunt articulos.

Species XII.

- [140] $X \bar{I} \bar{M}$ per $C \bar{C}$ si multiplicaveris, dabis digitis $C \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.
- [141] $C \bar{C}$ per $C \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{X} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.
- [142] $C \bar{C}$ per $\bar{I} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{X} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{C} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.
- [143] $C \bar{C}$ per $\bar{X} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{C} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.
- [144] $C \bar{C}$ per $\bar{C} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $X \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.
- [145] $C \bar{C}$ per $\bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $X \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $C \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.
- [146] $C \bar{C}$ per $X \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $C \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.
- [147] $C \bar{C}$ per $C \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{X} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.

- [136] Pokud násobíš miliony desítkami biliard, umístíš digity do desítek triliard a artikuly do stovek triliard.
- [137] Pokud násobíš miliony stovkami biliard, umístíš digity do stovek triliard a artikuly do kvadrilionů.
- [138] Pokud násobíš miliony triliony, umístíš digity do kvadrilionů a artikuly do desítek kvadrilionů.
- [139] Pokud násobíš miliony desítkami trilionů, umístíš digity do desítek kvadrilionů a artikuly do stovek kvadrilionů.

Násobení desítek milionů čili stovek statisíců,

při němž se digity posouvají o sedm a artikuly o osm sloupců od násobitele.

12 případů.

- [140] Pokud násobíš desítky milionů desítkami milionů, umístíš digity do stovek bilionů a artikuly do biliard.
- [141] Pokud násobíš stovky statisíců stovkami miliónů, umístíš digity do biliard a artikuly do desítek biliard.
- [142] Pokud násobíš stovky statisíců miliardami, umístíš digity do desítek biliard a artikuly do stovek biliard.
- [143] Pokud násobíš stovky statisíců desítkami miliard, umístíš digity do stovek biliard a artikuly do trilionů.
- [144] Pokud násobíš stovky statisíců stovkami miliard, umístíš digity do trilionů a artikuly do desítek trilionů.
- [145] Pokud násobíš stovky statisíců biliony, umístíš digity do desítek trilionů a artikuly do stovek trilionů.
- [146] Pokud násobíš stovky statisíců desítkami bilionů, umístíš digity do stovek trilionů a artikuly do triliard.
- [147] Pokud násobíš stovky statisíců stovkami bilionů, umístíš digity do triliard a artikuly do desítek triliard.

[148] *C C̄ per M̄ II M̄M̄ si multiplicaveris, dabis digitis X̄ M̄M̄ II M̄M̄ et articulis C̄ M̄M̄ II M̄M̄.*

[149] *C C̄ per X̄ II M̄M̄ si multiplicaveris, dabis digitis C̄ M̄M̄ II M̄M̄ et articulis II M̄M̄ II M̄M̄.*

[150] *C C̄ per C̄ II M̄M̄ si multiplicaveris, dabis digitis II M̄M̄ II M̄M̄ et articulis X̄ II M̄M̄ II M̄M̄.*

[151] *C C̄ per M̄M̄ II M̄M̄ si multiplicaveris, dabis digitis X̄ II M̄M̄ II M̄M̄ et articulis C̄ II M̄M̄ II M̄M̄.*

Multiplicatio centies millies milleni vel millies centeni milleni

cujus multiplicatores nono a se loco digitos et decimo mittunt articulos.

Species X.

[152] *C I M̄ per I C̄ si multiplicaveris, dabis digitis X̄ II M̄M̄ et articulis C̄ II M̄M̄.*

[153] *C I M̄ per II M̄ si multiplicaveris, dabis digitis C̄ II M̄M̄ et articulis M̄M̄ II M̄M̄.*

[154] *C I M̄ per X̄ II si multiplicaveris, dabis digitis M̄M̄ II M̄M̄ et articulis X̄ M̄M̄ II M̄M̄.*

[155] *C I M̄ per C̄ II si multiplicaveris, dabis digitis X̄ M̄M̄ II M̄M̄ et articulis C̄ M̄M̄ II M̄M̄.*

[156] *C I M̄ per II M̄M̄ si multiplicaveris, dabis digitis C̄ M̄M̄ II M̄M̄ et articulis I M̄M̄ II M̄M̄.*

[157] *C I M̄ per X̄ II M̄M̄ si multiplicaveris, dabis digitis I M̄M̄ II M̄M̄ et articulis X̄ M̄M̄ II M̄M̄.*

[158] *C I M̄ per C̄ II M̄M̄ si multiplicaveris, dabis digitis X̄ M̄M̄ II M̄M̄ et articulis C̄ M̄M̄ II M̄M̄.*

[159] *C I M̄ per M̄ II M̄M̄ si multiplicaveris, dabis digitis C̄ M̄M̄ II M̄M̄ et articulis II M̄M̄ II M̄M̄.*

[148] *Pokud násobíš stovky statisíců biliardami, umístíš digity do desítek triliard a artikuly do stovek triliard.*

[149] *Pokud násobíš stovky statisíců desítkami biliard, umístíš digity do stovek triliard a artikuly do kvadrilionů.*

[150] *Pokud násobíš stovky statisíců stovkami biliard, umístíš digity do kvadrilionů a artikuly do desítek kvadrilionů.*

[151] *Pokud násobíš stovky statisíců triliony, umístíš digity do desítek kvadrilionů a artikuly do stovek kvadrilionů.*

Násobení stovek milionů čili tisíců statisíců,

při němž se digity posouvají o osm a artikuly o devět sloupců od násobitele.

10 případů.

[152] *Pokud násobíš stovky milionů stovkami miliónů, umístíš digity do desítek biliard a artikuly do stovek biliard.*

[153] *Pokud násobíš stovky milionů miliardami, umístíš digity do stovek biliard a artikuly do trilionů.*

[154] *Pokud násobíš stovky milionů desítkami miliard, umístíš digity do trilionů a artikuly do desítek trilionů.*

[155] *Pokud násobíš stovky milionů stovkami miliard, umístíš digity do desítek trilionů a artikuly do stovek trilionů.*

[156] *Pokud násobíš stovky milionů biliony, umístíš digity do stovek trilionů a artikuly do triliard.*

[157] *Pokud násobíš stovky milionů desítkami bilionů, umístíš digity do triliard a artikuly do desítek triliard.*

[158] *Pokud násobíš stovky milionů stovkami bilionů, umístíš digity do desítek triliard a artikuly do stovek triliard.*

[159] *Pokud násobíš stovky milionů biliardami, umístíš digity do stovek triliard a artikuly do kvadrilionů.*

[160] $C \bar{I} \bar{M}$ per $\bar{X} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $X \bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.

[161] $C \bar{I} \bar{M}$ per $\bar{C} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $X \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $C \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.

Multiplicatio mille millies milleni vel decies millies centeni milleni

cujus multiplicatores decimo a se loco digitos et undecimo mittunt articulos.

Species VIII.

[162] $\bar{I} \bar{I} \bar{M}$ per $\bar{X} \bar{C}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{I} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $X \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.

[163] $\bar{I} \bar{I} \bar{M}$ per $\bar{X} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $X \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $C \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.

[164] $\bar{I} \bar{I} \bar{M}$ per $\bar{C} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $C \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.

[165] $\bar{I} \bar{I} \bar{M}$ per $\bar{M} \bar{M} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{X} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.

[166] $\bar{I} \bar{I} \bar{M}$ per $X \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{X} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{C} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.

[167] $\bar{I} \bar{I} \bar{M}$ per $C \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{C} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.

[168] $\bar{I} \bar{I} \bar{M}$ per $\bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $X \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.

[169] $\bar{I} \bar{I} \bar{M}$ per $\bar{X} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $X \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $C \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.

Multiplicatio decies \bar{M} millies milleni vel centies millies centeni milleni

cujus multiplicatores XI a se loco digitos et XII mittunt articulos.

Species VI.

[160] Pokud násobíš stovky milionů desítkami biliard, umístíš digity do kvadrilionů a artikuly do desítek kvadrilionů.

[161] Pokud násobíš stovky milionů stovkami biliard, umístíš digity do desítek kvadrilionů a artikuly do stovek kvadrilionů.

Násobení miliard čili desítek tisíců statisíců,

při němž se digity posouvají o devět a artikuly o deset sloupců od násobitele.

8 případů.

[162] Pokud násobíš miliardy miliardami, umístíš digity do trilionů a artikuly do desítek trilionů.

[163] Pokud násobíš miliardy desítkami miliard, umístíš digity do desítek trilionů a artikuly do stovek trilionů.

[164] Pokud násobíš miliardy stovkami miliard, umístíš digity do stovek trilionů a artikuly do triliard.

[165] Pokud násobíš miliardy biliony, umístíš digity do triliard a artikuly do desítek triliard.

[166] Pokud násobíš miliardy desítkami bilionů, umístíš digity do desítek triliard a artikuly do stovek triliard.

[167] Pokud násobíš miliardy stovkami bilionů, umístíš digity do stovek triliard a artikuly do kvadrilionů.

[168] Pokud násobíš miliardy biliardami, umístíš digity do kvadrilionů a artikuly do desítek kvadrilionů.

[169] Pokud násobíš miliardy desítkami biliard, umístíš digity do desítek kvadrilionů a artikuly do stovek kvadrilionů.

Násobení desítek miliard čili stovek tisíců statisíců,

při němž se digity posouvají o deset a artikuly o jedenáct sloupců od násobitele.

6 případů.

[170] $\bar{X} \bar{I} \bar{M}$ per $\bar{C} \bar{C}$ si multiplicaveris, dabis digitis $C \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.

[171] $\bar{X} \bar{I} \bar{M}$ per $C \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{X} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.

[172] $\bar{X} \bar{I} \bar{M}$ per $\bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{X} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{C} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.

[173] $\bar{X} \bar{I} \bar{M}$ per $\bar{X} \bar{I} \bar{I} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{C} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.

[174] $\bar{X} \bar{I} \bar{M}$ per $\bar{C} \bar{I} \bar{I} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{X} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.

[175] $\bar{X} \bar{I} \bar{M}$ per $\bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{X} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $C \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.

Multiplicatio centies \bar{M} millies milleni vel millies \bar{II} centeni milleni

cujus multiplicatores XII a se loco digitos et XIII mittunt articulos.

Species IV.

[176] $\bar{C} \bar{I} \bar{M}$ per $\bar{M} \bar{I} \bar{C}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{X} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{C} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.

[177] $\bar{C} \bar{I} \bar{M}$ per $\bar{X} \bar{I} \bar{C}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{C} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.

[178] $\bar{C} \bar{I} \bar{M}$ per $\bar{C} \bar{I} \bar{C}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $\bar{X} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.

[179] $\bar{C} \bar{I} \bar{M}$ per $\bar{C} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{X} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $C \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.

Multiplicatio millies mille millies milleni

cujus multiplicatores XIII a se loco digitos et XIV mittunt articulos.

Species II.

[170] Pokud násobíš desítky miliard desítkami miliard, umístíš digity do stovek trilionů a artikuly do triliard.

[171] Pokud násobíš desítky miliard stovkami miliard, umístíš digity do triliard a artikuly do desítek triliard.

[172] Pokud násobíš desítky miliard biliony, umístíš digity do desítek triliard a artikuly do stovek triliard.

[173] Pokud násobíš desítky miliard desítkami bilionů, umístíš digity do stovek triliard a artikuly do kvadrilionů.

[174] Pokud násobíš desítky miliard stovkami bilionů, umístíš digity do kvadrilionů a artikuly do desítek kvadrilionů.

[175] Pokud násobíš desítky miliard bilionů, umístíš digity do desítek kvadrilionů a artikuly do stovek kvadrilionů.

Násobení stovek miliard čili milionů státisíců,

při němž se digity posouvají o jedenáct a artikuly o dvanáct sloupců od násobitele.

4 případy.

[176] Pokud násobíš stovky miliard stovkami miliard, umístíš digity do desítek triliard a artikuly do stovek triliard.

[177] Pokud násobíš stovky miliard biliony, umístíš digity do stovek triliard a artikuly do kvadrilionů.

[178] Pokud násobíš stovky miliard desítkami bilionů, umístíš digity do kvadrilionů a artikuly do desítek kvadrilionů.

[179] Pokud násobíš stovky miliard stovkami bilionů, umístíš digity do desítek kvadrilionů a artikuly do stovek kvadrilionů.

Násobení bilionů,

při němž se digity posouvají o dvanáct a artikuly o třináct sloupců od násobitele.

2 případy.

- [180] $\bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M}$ per $\bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $\bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $X \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.
- [180] Pokud násobíš biliony biliony, umístíš digity do kvadrilionů a artikuly do desítek kvadrilionů.
- [181] $\bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M}$ per $\bar{X} \bar{I} \bar{I} \bar{M}$ si multiplicaveris, dabis digitis $X \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$ et articulis $C \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M} \bar{I} \bar{I} \bar{M} \bar{M}$.
- [181] Pokud násobíš biliony desítkami bilionů, umístíš digity do desítek kvadrilionů a artikuly do stovek kvadrilionů.

PŘÍLOHA B

GERBERTUS AURILIACENSIS, *REGULAE DE NUMERORUM ABACI RATIONIBUS*⁶⁴*Regulae multiplicationis*

- [0] *Si multiplicaveris singularem numerum per singularem, dabis unicuique digito singularem, et omni articulo decem, directe scilicet et conversim.*
- [1] *Si multiplicaveris singularem per decenum dabis unicuique digito decem et omni articulo centum.*
- [26] *Si decenum per decenum, dabis digitis centum, articulis mille.*
- [27] *Si decenum per centenum, dabis digitis mille, articulis decem millia.*
- [50] *Si centenum per centenum, dabis digitis decem millia, articulis centum millia.*
- [51] *Si centenum per millenum, dabis digitis centum millia, articulis decies centena millia.*
- [72] *Si millenum per millenum, dabis digitis decies centena millia, articulis centies centena millia.*
- [2] *Si singularem per centenum, dabis digitis centum, articulis mille.*
- [3] *Si singularem per millenum, dabis digitis mille, articulis decem millia.*

Pravidla násobení

- [0] *Pokud násobíš jednotky jednotkami, umístíš každý digitus do jednotek a každý artikulus do desítek, tedy vedle sebe a v opačném pořadí.*⁶⁵
- [1] *Pokud násobíš jednotky desítkami, umístíš každý digitus do desítek a každý artikulus do stovek.*
- [26] *Pokud desítky desítkami, umístíš digitus do stovek, artikulus do tisíců.*⁶⁶
- [27] *Pokud desítky stovkami, umístíš digitus do tisíců, artikulus do desítek tisíců.*
- [50] *Pokud stovky stovkami, umístíš digitus do desítek tisíců, artikulus do stovek tisíců.*⁶⁷
- [51] *Pokud stovky tisíci, umístíš digitus do stovek tisíců, artikulus do milionů.*
- [72] *Pokud tisíce tisíci, umístíš digitus do miliónů, artikulus do desítek miliónů.*⁶⁸
- [2] *Pokud jednotky stovkami, umístíš digitus do stovek, artikulus do tisíců.*
- [3] *Pokud jednotky tisíci, umístíš digitus do tisíců, artikulus do desítek tisíců.*

⁶⁴ Gerbertus, *Regulae*, s. 8–11.

⁶⁵ Tzn. digitus bude vpravo a artikulus vlevo.

⁶⁶ Glosa: „*Quemcunque decenus multiplicat, in secundo ab illo digitos, in tertio articulos ponet.*“ [„Násobí-li se jakékoli číslo desítkou, posune se digitus o jeden sloupec od násobitele a artikulus o dva sloupce.“]

⁶⁷ Glosa: „*Quemcunque centenus multiplicat, in tertio ab illo digitos, in ulteriore articulos ponet.*“ [„Násobí-li se jakékoli číslo stovkou, posune se digitus do druhého sloupce od násobitele a artikulus hned vedle.“]

⁶⁸ Glosa: „*Quemcunque millenus multiplicat, in quarto ab illo digitos, in ulteriore ponet articulos.*“ [„Násobí-li se jakékoli číslo tisícem, posune se digitus do třetího sloupce od násobitele a artikulus hned vedle.“]

- [28] *Si decenum per millenum, dabis digitis decem millia, articulis centum millia.*
- [110] *Si centenum millenum per centenum millenum, dabis digitis decies milies mille millia, articulis centies milies mille millia.*
- [93] *Si decenum millenum per centenum millenum, dabis digitis milies mille millia, articulis decies milies mille millia.*
- [74] *Si millenum per centenum millenum, digitis centies mille millia, articulis milies mille millia.*
- [53] *Si centenum per centenum millenum, digitis decies mille millia, articulis centies mille millia.*
- [30] *Si decenum per centenum millenum, digitis mille millia, articulis decies mille millia.*
- [5] *Si singularem per centenum millenum, digitis centum millia, articulis mille millia.*
- [92] *Si decenum millenum per decenum millenum, digitis centies mille millia articulis milies mille millia.*
- [73] *Si millenum per decenum millenum, digitis decies mille millia, articulis centies mille millia.*
- [52] *Si centenum per decenum millenum, digitis mille millia, articulis decies mille millia.*
- [29] *Si decenum per decenum millenum, digitis centum millia, articulis mille millia.*
- [28] *Pokud desítky tisíci, umístíš digitus do desítek tisíců, artikulus do stovek tisíců.*
- [110] *Pokud stovky tisíců stovkami tisíců, umístíš digitus do desítek miliard, artikulus do stovek miliard.*
- [93] *Pokud desítky tisíců stovkami tisíců, umístíš digitus do miliard, artikulus do desítek miliard.⁶⁹*
- [74] *Pokud tisíce stovkami tisíců, digitus do stovek miliónů, artikulus do miliard.*
- [53] *Pokud stovky statisíci, digitus do desítek miliónů, artikulus do stovek miliónů.*
- [30] *Pokud desítky statisíci, digitus do miliónů, artikulus do desítek miliónů.*
- [5] *Pokud jednotky statisíci, digitus do statisíců, artikulus do miliónů.*
- [92] *Pokud desetitisíce desetisíci, digitus do stovek miliónů, artikulus do miliard.*
- [73] *Pokud tisíce desetisíci, digitus do desítek miliónů, artikulus do stovek miliónů.*
- [52] *Pokud stovky desetisíci, digitus do miliónů, artikulus do desítek miliónů.*
- [29] *Pokud desítky desetisíci, digitus do statisíců, artikulus do miliónů.*

⁶⁹ Glosa: „*Quemcunque decenus millenus multiplicat, in quinto ab illo digitos, in ulteriore ponet articulos.*“ [„*Násobí-li se jakékoli číslo desetitisícem, posune se digitus do čtvrtého sloupce od násobitele a artikulus hned vedle.*“]

[4] *Si singularem per decenum millenum, digitis decem millia, articulis centum millia.*

[4] *Pokud jednotky desetitisíci, digitus do desetisíců, artikulus do statisíců.*

PŘÍLOHA C

*ABBONIS ABACUS*⁷⁰

- | | |
|---|--|
| <p>[1] <i>Si multiplicaveris singularem numerum per decenum, dabis unicuique digito X et omni articulo C.</i></p> <p>[1a] <i>S. m. decenum p. singularem, d. u. d. X et o. a. C.</i></p> <p>[26] <i>S. m. decenum p. decenum, d. u. d. C et o. a. mille.</i></p> <p>[27] <i>S. m. decenum p. centenum, d. u. d. M et o. a. \bar{X}.</i></p> <p>[27a] <i>S. m. centenum p. decenum, d. u. d. M et o. a. \bar{X}.</i></p> <p>[50] <i>S. m. centenum p. centenum, d. u. d. \bar{X} et o. a. \bar{C}.</i></p> <p>[51] <i>S. m. centenum p. millenum, d. u. d. \bar{C} et o. a. decies \bar{C}.</i></p> <p>[51a] <i>S. m. millenum per centenum, d. u. d. \bar{C} et o. a. decies \bar{C}.</i></p> <p>[72] <i>S. m. millenum per millenum, d. u. d. decies \bar{C} et o. a. centies \bar{C}.</i></p> <p>[28] <i>Si multiplicaveris decenum p. millenum, d. u. d. \bar{X} et o. a. \bar{C}.</i></p> | <p>[1] <i>Pokud násobíš jednotky desítkami, umístíš každý digitus do desítek a každý artikulus do stovek.</i></p> <p>[1a] <i>Pokud násobíš desítky jednotkami, umístíš každý digitus do desítek a každý artikulus do stovek.</i></p> <p>[26] <i>Pokud násobíš desítky desítkami, umístíš každý digitus do stovek a každý artikulus do tisíců.</i></p> <p>[27] <i>Pokud násobíš desítky stovkami, umístíš každý digitus do tisíců a každý artikulus do desetitisíců.</i></p> <p>[27a] <i>Pokud násobíš stovky desítkami, umístíš každý digitus do tisíců a každý artikulus do desetitisíců.</i></p> <p>[50] <i>Pokud násobíš stovky stovkami, umístíš každý digitus do desetitisíců a každý artikulus do statisíců.</i></p> <p>[51] <i>Pokud násobíš stovky tisíci, umístíš každý digitus do statisíců a každý artikulus do desítek statisíců.</i></p> <p>[51a] <i>Pokud násobíš tisíce stovkami, umístíš každý digitus do statisíců a každý artikulus do desítek statisíců.</i></p> <p>[72] <i>Pokud násobíš tisíce tisíci, umístíš každý digitus do desítek statisíců a každý artikulus do stovek statisíců.</i></p> <p>[28] <i>Pokud násobíš desítky tisíci, umístíš každý digitus do desetitisíců a každý artikulus do statisíců.</i></p> |
|---|--|

⁷⁰ Abbo, *Abacus*, s. 203.

- [28a] *S. m. millenum p. decenum, d. u. d. X̄ et o. a. C̄.* [28a] *Pokud násobíš tisíce desítkami, umístíš každý digitus do desetitisíců a každý artikulus do statisíců.*
- [29a] *S. m. decenum millenum p. decenum, d. u. d. C̄ et o. a. decies C̄.* [29a] *Pokud násobíš desetitisíce desítkami, umístíš každý digitus do statisíců a každý artikulus do desítek statisíců.*
- [29] *S. m. decenum p. decenum millenum, d. u. d. C̄ et o. a. decies C̄.* [29] *Pokud násobíš desítky desetitisíci, umístíš každý digitus do statisíců a každý artikulus do desítek statisíců.*
- [92] *S. m. decenum millenum p. decenum millenum, d. u. d. centies centus milia et o. a. milies mille milia.* [92] *Pokud násobíš desetitisíce desetitisíci, umístíš každý digitus do stovek statisíců a každý artikulus do miliard.*