



Epistemologické výzvy platonismu a Gödelovo pojetí matematické intuice

Iva Svačinová, FF MU Brno

Abstrakt: Text se věnuje možnosti uspokojivé epistemologie matematického platonismu: otázce, jak je možné získat znalost o entitách, které jsou abstraktní a na mysli nezávislé. První část textu se zaměřuje na vymezení platonismu a formulaci epistemologických námitek, představuje námitky Paula Benacerrafa a Hartryho Fielda. Ve druhé části je představena a analyzována matematická intuice postulovaná Kurtem Gödelem. Gödelova epistemologická strategie je upřesněna pomocí otázek: (1) O jaký typ intuice se jedná? (2) Jedná se o spolehlivý zdroj znalosti? (3) Podává Gödel nějaké vysvětlení mechanismu intuice?

Abstract: This paper deals with the possibility of satisfactory epistemology of mathematical platonism: it questions how it is possible to obtain a knowledge of abstract and mind-independent entities. The first part of the paper focuses on defining platonism and formulation of epistemological objections by Paul Benacerraf and Hartry Field. In the second part mathematical intuition postulated by Kurt Gödel is presented and analysed. Gödel's epistemological strategy is identified on the basis of questions: (1) What kind of intuition is it? (2) Is it a reliable source of knowledge? (3) Does Gödel provide an explanation of the mechanism of intuition?

Klíčová slova: epistemologie, matematický platonismus, Benacerraf, Field, Gödel, intuice

Keywords: epistemology, mathematical platonism, Benacerraf, Field, Gödel, intuition

Tento text je věnován epistemologii matematického platonismu. Velmi obecně bychom mohli celý problém vymežit jako pokus o vyřešení následujícího názorového střetu: zatímco matematický platonik tvrdí, že existují abstraktní a na nás nezávislé matematické objekty, jeho oponent pokládá otázku: „Ale jak to *víte*?“ Chce-li zastánce matematického platonismu obstát, pak musí tuto otázku přijmout jako výzvu a pokusit se podat na ni přesvědčivou odpověď.

Text se skládá ze dvou částí. V první části textu vymežím ontologickou pozici matematického platonismu prostřednictvím klíčových tezí, k nimž se matematictí platonikové

zavazují. Následně představím epistemologický závazek, který s pozicí matematického platonismu souvisí a na nějž ve svých textech upozornili kritikové matematického platonismu Paul Benacerraf a Hartry Field. Ve druhé části textu se budu věnovat pokusu o rekonstrukci epistemologie jednoho z nejvýznamnějších matematických platoniků minulého století Kurta Gödela.

1.1 Vymezení ontologického platonismu

Jak lze vymežit ontologickou pozici matematického platonismu? Jaké stanovisko zastávají matematictí platonikové? Pro první přiblížení uvádím definici matematického platonismu, kterou formulují zastánci konkurenčních pozic: autorem první z nich je Kurt Gödel, autorem druhé jeho kritik, nominalista Hartry Field.

(i) „[Platonismus je – pozn. I. S.] názor, podle nějž matematika popisuje nesmyslovou skutečnost, která existuje nezávisle jak na aktech, tak na dispozicích lidské mysli a je pouze vnímána [perceived] lidskou myslí a to vnímána pravděpodobně velmi neúplně.“¹

(ii) „Matematický realista nebo platonik (...) je osoba, která (a) věří v existenci matematických entit (čísel, funkcí, množin atd.) a (b) věří, že [tyto entity – pozn. I.S.] jsou na mysli a jazyku nezávislé.“²

Už z letného srovnání můžeme vyvodit, že se obě pozice v pojetí východisek platonismu shodují: matematický platonismus je obecně pojímán jako teorie, která stanovuje ontologický status entit, které studuje matematika. Gödelova i Fieldova definice zdůrazňuje především nezávislost matematických objektů a jejich nesmyslovost (abstraktnost), oba autoři se shodují v tom, že platonikové předpokládají existenci těchto objektů. Tyto tři rysy chápe jako podstatné i Øystein Linnebo, jehož pojetí platonismu v této práci přijímám jako výchozí.³ Stanovisko matematického platonismu tedy uvažujeme jako konjunkci následujících tří tezí:

[abstraktnost] Matematické objekty jsou abstraktní.

[nezávislost] Matematické objekty jsou nezávislé.

[existence] Matematické objekty existují.⁴

¹ Gödel, K. Některé fundamentální věty o základech matematiky a jejich filosofické důsledky. In Gödel, K. *Filosofické eseje*. Praha: Oikoyomenh, 1999, s. 84-128, s. 115.

² „A mathematical realist, or platonist, (...) is a person who (a) believes in the existence of mathematical entities (numbers, functions, sets and so forth), and (b) believes them to be mind-independent and language-independent.“ Field, H. *Realism, Mathematics, and Modality*. Oxford: Blackwell, 1989, 1. Dostupné z WWW: <<http://faculty.unlv.edu/jwood/unlv/FieldFiction.pdf>>.

³ Obdobné rozdělení jako Linnebo ale využívá např. i Julian C. Cole v přehledovém textu *Mathematical Platonism*. Srovnej Cole, J. C. *Mathematical Platonism*. *Internet Encyclopedia of Philosophy*. [online]. last. modif. 14. 3. 2010. [cit. dne 2012-05-05]. Dostupné z WWW: <<http://www.iep.utm.edu/mathplat/>> .

⁴ Srovnej Linnebo, Ø. *Platonism in Philosophy of Mathematics*. *Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2011 Edition)* [online]. Stanford: The Metaphysics Research Lab, 2008. last modif. 25. 6. 2011. [cit. dne 2012-05-05]. Dostupné z WWW: <<http://plato.stanford.edu/archives/fall2011/entries/platonism-mathematics/>> .

První dvě teze stanovují vlastnosti matematických entit, třetí teze pak deklaruje existenci těchto entit. Matematický platonismus tedy tvrdí existenci entit, které jsou abstraktní a zároveň nezávislé. Co to ale znamená?

[abstraktnost] Matematické objekty jsou abstraktní.

Abstraktní objekty jsou vysvětlovány v opozici ke konkrétním objektům: není-li objekt konkrétní, pak musí být abstraktní, žádný objekt nemůže být zároveň abstraktní i konkrétní. Přijmeme-li tuto distinkci, tedy, že objekt je abstraktní právě tehdy, když není konkrétní, pak můžeme tezi o abstraktnosti platně přeformulovat:

[abstraktnost‘] Matematické objekty nejsou konkrétní.

Konkrétní objekty jsou charakterizovány jako časově a prostorově lokalizované objekty, které mohou vstupovat do kauzálních vazeb. Z předchozího pak vyplývá, že abstraktní objekty jsou objekty, jejichž charakteristiky jsou negacemi těchto charakteristik konkrétních objektů, tedy, že nejsou časově a prostorově lokalizované a jsou kauzálně inertní.⁵ Máme tedy dvě podmínky, které musí abstraktní objekty splňovat. První charakteristika stanovuje říši objektů mimo prostor a čas. Druhou charakteristikou je kauzální inertnost. Ta není nezávislou podmínkou, ale je odvozena z předpokladu, že pouze konkrétní objekty v prostoru a čase na nás mohou kauzálně působit – abstraktní objekty pak tuto schopnost postrádají.⁶ Kauzální síla je zde tedy odvozena z lokalizovatelnosti a předpokladu, že jen lokalizovatelné objekty jsou kauzálně potentní.

[nezávislost] Matematické objekty jsou nezávislé.

Nezávislost objektů je možné vysvětlit tak, že matematické objekty nejsou závislé na aktivitě, myšlení nebo jazyku inteligentního agenta – za inteligentní agenty bývají nejčastěji, kvůli zajištění neproblematičnosti, považováni matematikové. Potom tedy můžeme nezávislost matematických objektů vysvětlit tak, že i kdyby nikdy neexistoval žádný matematik, pro existenci a charakter matematických objektů by to neznamenal žádnou změnu, stále by tu byly tytéž matematické objekty.⁷ Tato teze představuje matematické objekty jako v určitém ohledu podobné fyzickým objektům – totiž v tom smyslu, že matematické objekty jsou na matematikovi stejně nezávislé jako fyzické objekty na fyzikovi. Tato paralela bývá

⁵ Považuji ovšem za důležité upozornit na jistou problematičnost této ostré distinkce mezi abstraktními a konkrétními objektů, která nemusí být vyčerpávající. S možnou námitkou přichází Bob Hale, který upozornil na to, že můžeme uvažovat abstraktní entity, jako jsou jazyky nebo hry, které nejsou prostorově lokalizovatelné, které ale můžeme lokalizovat časově, a které se dokonce mohou v čase vyvíjet. Srovnej Hale, B. *Abstract Objects*. Oxford: Basil Blackwell, 1987, s. 49.

⁶ Srovnej Rodriguez-Pereyra, G. Nominalism in Metaphysics. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2011 Edition)* [online]. Stanford: The Metaphysics Research Lab, 2008. last modif. 20. 6. 2011. Dostupné z WWW: <<http://plato.stanford.edu/archives/fall2011/entries/nominalism-metaphysics/>> . [cit. dne 2012-05-05].

⁷ Srovnej Linnebo, Ø. Platonism in Philosophy of Mathematics.

platoniky často využívána: objekty matematiky jsou matematikou objevovány a popisovány, ne vytvářeny, podobně jako jsou objekty fyziky popisovány fyzikou. Tuto paralelu využívá i Kurt Gödel, jak uvidíme níže.

[existence] Matematické objekty existují.

Třetí teze platonismu tvrdí existenci objektů, které splňují podmínky dané tezemi o abstraktnosti a nezávislosti. Matematický platonismus tvrdí, že existuje neprázdná třída matematických objektů, přičemž za objekty splňující podmínky kladené tezemi [abstraktnost] a [nezávislost] považuje čísla, množiny a funkce.⁸

1.2 Epistemologický platonismus

Nazvěme tedy ontologickým platonismem doktrínu, podle níž existují takové matematické objekty, které jsou abstraktní a na mysli a jazyku inteligentních agentů nezávislé. Součástí problematiky matematického platonismu jsou ale i otázky typu: Jak víme, že jsou matematické propozice pravdivé? Jak poznáváme matematické objekty? Máme nějakou možnost, jak dojít ke znalosti objektů, které jsou abstraktní? Nazvěme epistemologickým platonismem doktrínu, která tvrdí, „(...) že lidské bytosti mohou mít a mají znalost o existenci a vlastnostech těchto objektů.“⁹ Tyto dvě doktríny jsou odlišné a neměli bychom je zaměňovat: první z nich se týká ontologického statusu entit a jejich vlastností, druhá našeho přístupu k poznání těchto entit. Matematický platonismus zde bude chápán jako konjunkce ontologického a epistemologického platonismu:

[Ontologický platonismus] Existují matematické objekty, které jsou abstraktní a nezávislé.

[Epistemologický platonismus] Lidské bytosti mohou mít znalost o těchto matematických objektech a jejich vlastnostech.

Je možné uvažovat teze odděleně? Podle Colina Cheyna se zdá neudržitelné zastávat ontologický platonismus a popírat epistemologický – ontologický platonismus podle něj implikuje epistemologický, má-li být smysluplný: „[p]okud tvrdím podrobnosti o obyvatelích na vzdálené planetě, ale popírám, že bych o těchto cizincích měl znalost, potom neexistuje žádný důvod, proč by má tvrzení měla být považována za něco víc než za prosté fantazie.“¹⁰ Analogicky pak můžeme vyvodit: tvrdíme-li něco o matematických objektech, ale popíráme,

⁸ Srovnej Linnebo. Ø. *Platonism in Philosophy of Mathematics*.

⁹ „(...) that human beings can and do have knowledge of the existence and properties of such objects.“ Cheyne, C. *Knowledge, cause, and abstract objects: causal objections to Platonism*. Kluwer Academic Publishers, 2001, s. 3. Dostupné z WWW: <http://books.google.cz/books?id=SqlTOZfefeAC&hl=cs&source=gbs_navlinks_s>.

¹⁰ If I assert details of the inhabitants of distant planet but deny that I have any knowledge of these aliens, then there is no reason why my assertions should be regarded as anything more than idle fancies.“ Cheyne, C. *Knowledge, cause and abstract objects: causal objections to Platonism*, s. 3.

že bychom o nich měli znalost, pak není důvod, proč by naše matematická tvrzení měla být považována za něco víc než za fantazie. Platonici ovšem považují výroky o matematických objektech za pravdivé a také předpokládají, že o těchto pravdivých výrocích je možné mít znalost. Snaží se tedy zastávat platnost doktrín ontologického i epistemologického platonismu zároveň.

Doposud byl pojem znalosti používán pouze vágně, abychom mohli tezi epistemologického platonismu lépe pochopit, pokusím se v následující odbočce o jeho ozřejmění. Znalost bývá tradičně chápána jako zdůvodněné pravdivé přesvědčení (dále ZPP):

[Podmínka pravdivosti] Pokud S ví, že p , pak je pravda, že p .

[Podmínka přesvědčení] Pokud S ví, že p , pak S věří, že p .

[Podmínka zdůvodnění] Pokud S ví, že p , pak má S zdůvodnění akceptovat, že p .¹¹

První dvě podmínky bývají přijímány neproblematicky – je absurdní tvrdit, že by nepravda měla být předmětem poznání, stejně jako tvrdit, že něco víme, ale nevěříme tomu. Poslední podmínkou je podmínka zdůvodnění – S má zdůvodnění akceptovat, že p , pokud „(...) jeho akceptace spočívá na adekvátní evidenci (...).“¹² Podmínka zdůvodnění je k podmínkám pravdivosti a přesvědčení připojena proto, aby bylo zamezeno tzv. epistémickému štěstí – situaci, kdy někdo náhodou uhodne pravdivé propozice. Přesvědčení, které je pravdivé jen díky šťastné náhodě, nemůže být považováno za znalost; znalost vyžaduje dostatečně silnou evidenci pro dané přesvědčení.¹³ Podmínka zdůvodnění bývá nejčastěji diskutovanou podmínkou – klíčovou otázkou samozřejmě je, co může být považováno za adekvátní evidenci.

Vraťme se nyní k problému epistemologického platonismu a uvažme:

(1) S ví, že $2+2=4$.

(1) bude propoziční znalostí v případě, že:

(a) je pravda, že $2+2=4$.

(b) S je přesvědčen, že $2+2=4$.

(c) S má zdůvodnění akceptovat, že $2+2=4$.

Matematický platonik věří, že podmínka (a) je splněna na základě toho, že existují matematické entity, které jsou v určitém vztahu, který propozice $2+2=4$ vyjadřuje. Není pochyb o tom, že je o tom přesvědčen, čili podmínka (b) je taktéž splněna. Diskuze, která je vedena ohledně epistemologické doktríny matematického platonismu, se týká podmínky

¹¹ Srovnej Lehrer, K. *Teória poznania*. Bratislava: Infopress, 1999, s. 17-19.

¹² Lehrer, K. *Teória poznania*, s. 19.

¹³ Srovnej Steup, M. *The Analysis of Knowledge*.

(c). Jakou máme adekvátní evidenci o abstraktních entitách nezávislých na mysli a jazyku, která by zaručila, že lidské bytosti mohou mít o propozicích tohoto typu znalost?

1.2.1 Kauzální teorie znalosti

Doktrína epistemologického platonismu a zároveň s ní i pozice matematického platonismu jako celku byla napadena v sedmdesátých letech. V roce 1973 tuto výzvu v textu „The Causal Theory of Knowledge and Platonism“ formuloval Mark Steiner. Kritiku proti epistemologickému platonismu vznesli filozofové zastávající v té době velmi vlivnou kauzální teorii znalosti. Uvědomme si historické souvislosti: v roce 1963 vychází text Edmunda Gettiera „Is Justified True Belief Knowledge“¹⁴ – Gettier v něm zpochybňuje tradiční analýzu znalosti: i když jsou splněna kritéria ZPP, může nastat situace, kdy subjekt *S* nedosáhne znalosti. Na takto stanovenou výzvu odpovídá o čtyři roky později Alvin I. Goldman textem „A Causal Theory of Knowing.“¹⁵ Goldman v článku stanovuje jako dodatečnou podmínku ZPP kauzální vazbu mezi přesvědčením a faktem, který toto přesvědčení způsobuje. Formulujeme ji takto:

[CTK] *S* ví, že *p*, pouze pokud fakt, že *p*, je patřičně kauzálně spojen s přesvědčením *S*, že *p*.¹⁶

Tento stručný exkurz nám poslouží k pochopení okolností Steinerova textu. Steiner totiž zkoumá epistemologické možnosti platonismu právě optikou kauzální teorie. Formuluje tuto úvahu:

„(...) pokud matematické entity skutečně existují, jsou nepoznatelné – a tudíž jsou matematické pravdy nepoznatelné. Nemůžeme vědecky uchopit objekty, které nijak kauzálně nepůsobí na každodenní záležitosti. Veškerá naše znalost o Zemi a její plnosti pramení z kauzální interakce zemských těles s našimi těly. Pokud jsou čísla *atd.* mimo všechny kauzální řetězce, mimo prostor a čas, pak jsou nedostupné. Čili, matematik čelí dilematu: buď jeho axiomy nejsou pravdivé (za předpokladu, že matematické entity neexistují) nebo jsou nepoznatelné.“¹⁷

Steiner vychází z předpokladu [CTK]: aby mohl mít subjekt *S* znalost, že *p*, je nutné, aby mezi přesvědčením, že *p*, a faktem *p* existovala kauzální vazba. Dejme tomu, že je *S* přesvědčen, že

¹⁴ Gettier, E. Is Justified True Belief Knowledge. *Analysis*, vol. 25 (1963), s. 121-123. Dostupné z WWW: <http://www.felsefedersligi.com/FileUpload/op30412/File/e.gettier_isjustifiedtruebeliefknowledge.pdf>.

¹⁵ Goldman, A. I. A Causal Theory of Knowing. *The Journal of Philosophy*, vol. 64, no. 12 (1967), s. 357-372. Dostupné z WWW: <<http://www.jstor.org/stable/2024268>>.

¹⁶ Srovnej Goldman, A. I. A Causal Theory of Knowing, s. 358.

¹⁷ (...) if mathematical entities really exist, they are unknowable – hence mathematical truths are unknowable. There cannot be a science treating of objects that make no causal impression on daily affairs. All our knowledge about the earth and the fullness thereof arises from the causal interaction of earthly bodies with our bodies. Since numbers, *et al.*, are outside all causal chains, outside time and space, they are inscrutable. Thus the mathematician faces a dilemma: either his axioms are not true (supposing mathematical entities not to exist) or they are unknowable. Steiner, M. Platonism and the Causal Theory of Knowledge. *The Journal of Philosophy*, vol. 70, no. 3 (1973), s. 57-66, s. 58. Dostupné z WWW: <<http://www.jstor.org/stable/2024837>>.

(2) $2+2=4$

Podle ontologického platonismu jsou matematické objekty abstraktní – z definice se nemohou účastnit kauzálního spojení, jak vyplývá z teze [abstraktnost]; a to je klíčový bod námítky vedené z pozice [CTK]. Aby mohla být propozice (2) znalostí, musela by být kauzální vazba mezi ní a faktem (2), totiž faktem, že existují matematické objekty v určitém vztahu, který propozice (2) vyjadřuje. Ta ale z principu neexistuje. Můžeme si tak představit dvě situace – buď existuje nějaký fakt (2) nebo ne: buď existují matematické objekty, jejichž stav (2) pravdivě popisuje, nebo neexistují a přesvědčení (2) potom nemůže být pravdivé.¹⁸ Ať už je ale situace jakákoliv, ani jeden z těchto potenciálních faktů nemůže (kauzálně) zapříčinit přesvědčení, že (2). Toto přesvědčení je tudíž nezdůvodněné, což je závěr, který je podle Steinera možné vyvodit, přijmeme-li kauzální teorii: buďto jsou matematické propozice nepravdivé, anebo, jsou-li pravdivé, stejně nemohou zapříčinit naši znalost. Všimněme si, že tento útok je veden proti ontologickému i epistemologickému platonismu: buďto musíme odmítnout ontologický platonismus, nebo epistemologický – obě pozice, a tedy matematický platonismus jako jejich konjunkci, nelze udržet.

1.2.2 Benacerrafovo dilema

Několik měsíců po Steinerově textu vychází vlivnější a dnes již klasický text Paula Benacerrafa „Mathematical Truth“. Benacerraf má své zázemí v kauzální teorii znalosti¹⁹ a problém vhodné epistemologie formuluje jako dilema, které je obecným problémem pro filozofii matematiky. Benacerrafem představené dilema můžeme jednoduše vysvětlit jako konflikt mezi požadavkem po vhodné sémantice jazyka matematiky a požadavkem vhodné epistemologie:

„Tvrdím, že dva zcela odlišné druhy zájmu mají odlišně motivovaná vysvětlení přirozenosti matematické pravdy: (1) zájem mít homogenní sémantickou teorii, v níž je sémantika pro matematické propozice paralelní sémantice pro zbytek jazyka a (2) zájem mít vysvětlení matematické pravdy, které je v souladu s obstojnou epistemologií.“²⁰

¹⁸ Mimoto můžeme ještě v intencích CTK zvážit následující situaci: totiž, že doména matematických entit neexistuje, ale přesvědčení (2) je přesto pravdivé, protože má kauzální vztah k nějakému jinému faktu, který je činí pravdivým. To je ovšem cesta, která vede k některému z neplatónských pojetí matematiky.

¹⁹ Je třeba poznamenat, že Steiner a spolu s ním i Benacerraf zesilují kauzální teorii oproti původní Goldmanově formulaci. Goldman totiž v textu, na nějž se Steiner i Benacerraf odkazují, připouští logické i matematické pravdy, když hned v úvodu píše: „[m]ůj zájem se týká pouze znalosti empirických propozic, protože myslím, že tradiční analýza je pro znalost neempirických pravd adekvátní.“ Goldman, A. I. *A Causal Theory of Knowing*, s. 357. Benacerraf ovšem aplikuje Goldmanova kritéria na znalost propozic bez rozdílu.

²⁰ „It is my contention that two quite distinct kinds of concerns have separately motivated accounts of the nature of mathematical truth: (1) the concern for having a homogeneous semantical theory in which semantics for the propositions of mathematics parallel the semantics for the rest of the language, and (2) the concern that the account of mathematical truth mesh with a reasonable epistemology.“ Benacerraf, P. *Mathematical Truth*. *The Journal of Philosophy*, vol. 70, no. 19 (1973), s. 661-679, s. 661.
Dostupné z WWW: <<http://www.jstor.org/stable/2025075>>.

Problém podle Benacerrafa spočívá v tom, že tyto dva zájmy jsou zároveň nerealizovatelné. Ty pozice ve filozofii matematiky, které mají přesvědčivý výklad sémantického aspektu, selhávají v případě vysvětlení své epistemologie. Naopak pozice, které mají vypracovanou přesvědčivou epistemologii matematiky, neobstojí v případě jednotné sémantiky. Pozicemi s přesvědčivou sémantikou jsou realistické programy, jejichž zástupcem je právě matematický platonismus. Platonismus, který počítá s existencí objektů, k nimž referuje, totiž uchopuje matematický i nematematický diskurz stejnými prostředky; matematika hovoří o abstraktních objektech stejným způsobem jako fyzika o fyzikálních. Problém pro tyto pozice ale nastává v okamžiku, kdy mají vysvětlit, jakým způsobem dospívají k poznání abstraktních objektů.

Naopak antirealistické programy, jejichž zástupcem může být např. Hilbertův formalismus, problém s vysvětlením své epistemologie nemají: formalisté vysvětlují matematickou pravdu kombinatoricky, v termínech formulí a důkazů, což jsou konkrétní poznatelné objekty. Selhávají ale v případě sémantiky, jelikož se musí uchýlit k dvojí sémantice – odlišné pro jazyk matematiky a pro zbytek jazyka. Jako by se ve filozofii matematiky vyvíjela sémantika na úkor epistemologie a naopak; což je tvrzení, které Benacerraf zdůrazňuje „(...) bude mou obecnou tezí, že prakticky všechna vysvětlení konceptu matematické pravdy mohou být ztotožněna se službou tomu nebo onomu z těchto pánů, *na úkor toho druhého*.“²¹ Na základě tohoto nesouladu Benacerraf formuluje dva „hroty“ dilematu, které je třeba otupit, či méně metaforickým jazykem, poukazuje na dvě překážky, které musí uspokojivé vysvětlení filozofie matematiky zároveň překonat. Bývají nazývány jako sémantická a epistemologická překážka. Formulujme je takto:

[Sémantická překážka] Mějme homogenní sémantickou teorii, v níž je sémantika pro tvrzení matematiky shodná se sémantikou pro zbytek jazyka.²²

[Epistemologická překážka] Mějme takové vysvětlení znalosti matematických propozic, které je v souladu s přijatelnou epistemologií.

Benacerrafovým ideálem řešení dilematu je pak takové vysvětlení matematické pravdy, kde „(...) se pojem matematické pravdy (...) musí slučovat s obecným vysvětlením znalosti způsobem, který ozřejmí, jak máme matematickou znalost, kterou máme. Přijatelná sémantika pro matematiku se musí slučovat s přijatelnou epistemologií.“²³

²¹ „It will be my general thesis that almost all account of the concept of mathematical truth can be identified with serving one or another of these masters *at the expense of the other*.“ Benacerraf, P. *Mathematical Truth*, s. 661.

²² Benacerraf přiznává, že jeho požadavek vychází z určité fikce, podle níž nějaká sémantika pro zbytek jazyka, ač aktuálně neexistuje, tak je alespoň možná, resp. že je zformulována pro ty segmenty jazyka, které jsou důležité z filozofického hlediska. Srovnej Benacerraf, P. *Mathematical Truth*, s. 661. Pozn. č. 1.

²³ „(...) the concept of mathematical truth (...) must fit into an over-all account of knowledge in a way that makes it intelligible how we have the mathematical knowledge that we have. An acceptable semantics for mathematics must fit an acceptable epistemology.“ Benacerraf, P. *Mathematical Truth*, s. 667.

1.2.3 Fieldova generalizace

Hartry Field se rozhodl formulovat svůj argument bez potenciálně problematických pojmů jako vědět, pravda, fakt apod., jejichž významy jsou zakotveny v konkrétních teoriích. Vychází přitom z otázky, proč jsou tvrzení matematiků spolehlivá. Matematici se totiž považují za vysoce spolehlivé osoby, co se přijatých pravdivých tvrzení týče. Vychází z následujícího schématu:

(1) Akceptuje-li matematik, že „ p “, pak p .

(kde „ p “ je možné nahradit větou matematiky). Fieldova argumentace pokračuje tím, že platonici podle něj akceptují toto schéma, které nazývá tvrzením spolehlivosti. Jsou-li matematici spolehliví ohledně takovýchto výroků, pak to zřejmě není náhoda. Matematici nejsou „šťastní blázni“, kteří si vždy, když se setkají s nějakou matematickou větou, hodí mincí, a ve většině případů se náhodou trefojí. Pak ale musíme předpokládat, že kompetentní matematik dokáže, na rozdíl od šťastlivce, svou úspěšnost nějak zdůvodnit.²⁴ A jak Field pokračuje, platonik se zavazuje nejen ke spolehlivosti svého tvrzení, ale také k tomu, že tuto spolehlivost může vysvětlit.

Field chápe výzvu danou Benacerrafovým dilematem takto: „(...) Benacerrafova výzva – nebo alespoň výzva, kterou podle mě jeho článek předkládá – je poskytnout vysvětlení *mechanismů*, které vysvětlí, jak naše přesvědčení o těchto nedostupných entitách mohou tak dobře reflektovat fakty o nich.“²⁵ To je ale problematické, setkáme-li se s abstraktními entitami. A uzavírá, že je podle něj v principu takřka nemožné podat vysvětlení mechanismu, kterým bychom mohli dospět ke znalosti takových objektů.

Field přichází na podporu svého závěru s argumentem z analogie, tzv. argumentem nepálské vesnice:²⁶ tvrdit, že máme pravdivá přesvědčení o abstraktních a tedy nedostupných entitách, je podobné, jako kdybychom tvrdili, že máme pravdivá přesvědčení o každodenních událostech ve vzdálené vesnici někde v Nepálu, a to navzdory tomu, že nemáme žádný mechanismus k vysvětlení korelace našich přesvědčení a událostí ve vesnici.²⁷ Field pak uzavírá, že „(...) *zdá-li se v principu nemožné to vysvětlit*, pak to *znemožňuje* víru v matematické entity, navzdory jakýmkoliv důvodům, které můžeme mít pro to, abychom v ně věřili.“²⁸

Fieldovu výzvu tedy můžeme formulovat takto: chtějí-li platonici tvrdit, že platí teze ontologického i epistemologického platonismu zároveň, pak musí představit přesvědčivé vysvětlení mechanismu, kterým dospíváme ke znalosti abstraktních entit. Ve Fieldově výzvě

²⁴ Srovnej Linnebo, Ø. Epistemological Challenges to mathematical platonism. *Philosophical Studies*, vol. 129, no. 3 (2006), s. 545–574, s. 549. Dostupné z WWW: <<http://www.jstor.org/stable/4321774>>.

²⁵ „But Benacerraf’s challenge – or at least, the challenge which his paper suggest to me – is to provide an account of the mechanisms that explain how our beliefs about these remote entities can so well reflexy the fact about them.“ [kurziva – I.S.] Field, H. *Realism, Mathematics and Modality*, s. 26.

²⁶ Všimněme si podobnosti s argumentací C. Cheyna představené v kapitole 1.2.

²⁷ Srovnej Field, H. *Realism, Mathematics and Modality*, s. 26–27.

²⁸ „(...) *if it appears in principle impossible to explain this*, then that tends to *undermine* the belief in mathematical entities, despite whatever reason we might have for believing in them.“ Field, H. *Realism, Mathematics and Modality*, s. 26.

můžeme vidět zajímavý posun v argumentaci – explicitně totiž přenáší argumentační břemeno na zastánce platonismu: jsou to platonici, kdo musí jasně prokázat své důvody, chtějí-li tezi platonismu zastávat. Nejsou-li toho schopni, pak by neměli o platonismu tvrdit, že je pravdivý.

V následující části práce se pokusím zhodnotit konkrétní argumentační strategii Kurta Gödela a její potenciální úspěšnost: kritériem k tomuto hodnocení bude to, jak se jí daří čelit Benacerrafově a především Fieldově generalizované výzvě.

2.1 Kurt Gödel a matematická intuice

Volba epistemologické strategie Kurta Gödela může působit ahistoricky – Gödelovy nejvýznamnější texty, v nichž můžeme stanovisko platonismu detekovat, totiž předchází o desítky let vystoupení kritiků Hartryho Fielda i Paula Benacerrafa. V případě Benacerrafova textu dokonce můžeme říci, že je to právě Gödelova platónská filozofie matematiky, proti níž je celé dilema vystavěno – a zdá se tedy nepřiměřeně požadovat po Gödelovi odpověď na výzvu, s níž zřejmě nebyl seznámen a kterou jeho filozofie matematiky teprve vyvolala. Je nicméně zajímavým historickým faktem, že mezi Benacerrafem a Gödelem proběhlo v roce 1975, tedy dva roky po publikaci Benacerrafova textu „Mathematical Truth“, několik rozhovorů. To samozřejmě vyvolává otázky, zda Gödel při těchto setkáních nevyjádřil své epistemologické názory. K něčemu takovému ovšem nedošlo, jak Benacerraf přiznává, neměl odvahu Gödela se svou formulací dilematu konfrontovat:

„(...) naše rozhovory byly poměrně jednostranné – já jsem se zeptal a on rozvedl své názory. Neměl jsem odvahu je zpochybnit. Představuji si, že jeho odpověď by byla, že epistemologie, s níž jsem se já cítil spokojen, jasně nebyla tím, co přijal on – on cítil, že ví věci, které by nemohl vědět, kdyby tato epistemologie byla správná. Čím by ji nahradil, nevím. To je téma, které nikdy nediskutoval, pokud je mi známo.“²⁹

Gödelovu filozofii matematiky ovšem musíme vzít na vědomí. Prvním důvodem může být důležitost Gödelovy filozofie matematiky pro předmět tohoto textu – tedy především to, že se jedná o impuls, který vyvolal Benacerrafovu kritiku. Druhým důvodem je fakt, že Gödelova filozofie nabízí jisté možnosti k výkladu epistemologie matematiky, které není možné ignorovat, třetím důvodem pak může být neutuchající zájem o Gödelův odkaz v řadách matematických platoniků.

Kurt Gödel bývá považován za platonika *par excellence*. On sám ostatně během svého života ve svých textech, v rozhovorech i dopisech opakovaně vyjádřil, že jeho filozofickým postojem ohledně matematických objektů je platonismus. Toto stanovisko vyjádřil poprvé v textu „Russellova matematická logika“ (1944), kontinuálně jej potvrzoval i ve svých

²⁹ „(...) our conversations were pretty one-sided -- I asked and he elaborated his views. I didn't have the audacity to challenge them. I imagine that his response would have been that the epistemology with which I felt comfortable was clearly not one that he embraced -- he felt he knew things he couldn't know if that epistemology were correct. What he would have substituted for it I do not know. It is a subject that he never discussed, to my knowledge.“ Z osobní korespondence s Paulem Benacerrafem.

pozdějších textech. Nejčastěji citovaným výrokem bývá v této souvislosti jeho prohlášení z roku 1975 v dotazníku B. D. Gradjeana, v němž potvrdil, že „(...) byl konceptuálním a matematickým realistou od roku 1925.“³⁰ O matematické intuici se Gödel zmiňuje ve většině svých publikovaných textů, zřejmě nejpropracovanější³¹ verzi pojetí matematické intuice představuje v dodatku k článku „Co je Cantorův problém kontinua?“ z roku 1964.

V této části textu si tedy kladu dva cíle: vysvětlit, co obnáší Gödelova koncepce matematické intuice, a ukázat, jaké důvody mají Benacerraf i Field k tomu, aby ji odmítli jako nedostatečnou. Nejprve se tedy pokusím rekonstruovat Gödelovo pojetí matematické intuice, proto bude třeba nejprve stručně vymezit používání termínu intuice. Následně provedu analýzu Gödelovy argumentace ve prospěch matematické intuice. V textu se pokusím podat odpovědi na tři otázky, které nám pomohou lépe určit status Gödelovy intuice jako nástroje k dosažení znalosti: (1) O jaký typ intuice se jedná? (2) Jedná se o spolehlivý zdroj znalosti? (3) Podává Gödel nějaké vysvětlení mechanismu intuice?

2.2 Intuice jako zdroj znalosti?

Termín intuice rozhodně nepatří mezi ty neproblematické. Filozofie jej převzala z přirozeného jazyka, kde má tento termín jisté před-filozofické užití, z něž je to filozofické odvozeno. Nezdá se ale, že by mezi filozofy panovala nějaká zásadní shoda ohledně významu tohoto termínu, který by mohla filozofická analýza vyjasnit; naopak se zdá, že v současných diskuzích neexistuje žádné technické užití, které by filozofové, kteří se analýze intuice věnují, chápali jako závazné či výchozí.³² V nejširším smyslu můžeme termín intuice chápat jako „bezprostřední pochopení“, kde „pochopení“ může označovat jak pocity, tak mystické porozumění či znalost, „bezprostřední“ pak odkazuje k různým významům: může být užito k označení absence usuzování, zdůvodnění, nebo naší schopnosti definovat pojem. Richard Rorty to glosuje slovy: „[v]zhledem k tomuto rozsahu použití nemůže být o intuici řečeno obecně nic.“³³ Rorty ovšem přece jen ve svém slovníkovém hesle formuluje čtyři odlišné významy termínu intuice. Prvním z nich je nezdůvodněné přesvědčení, které nepochází z usuzování – intuice je v tomto pojetí předtuchou, tušením. Ve druhém významu, podle Rortyho filozoficky zajímavějším, je intuice bezprostřední znalostí pravdy propozice, kde „bezprostřední“ znamená nepocházející z usuzování. Podle třetího pojetí je intuice

³⁰ „(...) was a conceptual and mathematical realist since 1925.“ Gödel, K. Gödel to Grandjean (1975). In Gödel, K. *Collected Works IV*. Oxford: Clarendon Press, 2003, s. 443-444. s. 444. Dostupné z WWW: <http://books.google.cz/books?id=tiUpO-v5i9QC&hl=cs&source=gbs_navlinks_s>.

³¹ Přehled výskytu termínu intuice a s ním spojených konotací v dřívějších Gödelových textech podává poměrně vyčerpávajícím způsobem Charles Parsons. Srovnej Parsons, Ch. Platonism and Mathematical Intuition in Kurt Gödel's Thought. *Bulletin of Symbolic Logic*. vol. 1, no. 1 (1995), s. 44-74, s. 53-64. Dostupné z WWW: <<http://www.jstor.org/stable/420946>>.

³² Srovnej Parsons, Ch. *Mathematical Thought and Its Objects*. Cambridge: Cambridge University Press, 2008, s. 138. Dostupné z WWW: <http://www.google.cz/books?id=C1r-9C8yP34C&hl=cs&source=gbs_navlinks_s>.

³³ „Given this range of uses, nothing can be said about intuition in general.“ Rorty, R. Intuition. In Edwards, P. (ed.) *The Encyclopedia of Philosophy. IV*. New York: The Macmillan Company & The Free Press, 1967, s. 204-212, s. 204.

bezprostřední znalostí konceptu, kde „bezprostřední“ znamená naši neschopnost pojem definovat. Podle posledního pojetí je pak intuice nepropoziční znalost nějaké entity.³⁴

Jak upozorňuje Charles Parsons, věnujeme-li se významu pojmu intuice v kontextu filozofie matematiky, je tato vágnost ohledně definování intuice obzvláště patrná, protože není zcela zřejmé, jestli ti, kteří hájí ideu matematické intuice, a ti, kdo ji napadají, mají na mysli tentýž koncept.³⁵ Abychom mohli přesněji uchopit pojem intuice, s nímž pracuje Gödel, považují za nutné přijmout důležitou distinkci, na niž Parsons upozorňuje.

2.2.1 Intuice *of a that*

Podle Parsonse totiž existuje dvojí způsob užití termínu intuice – ve vztahu k objektům a ve vztahu k propozicím. První z nich Parsons nazývá *intuition of*, druhou *intuition that*.

[intuice *of*] *S* má intuici *x*. (kde *x* je nějaký objekt)

[intuice *that*] *S* má intuici, že *p*. (kde *p* je nějaká propozice)

Příkladem prvního je intuice objektů teorie množin, příkladem druhého může být intuice, že některý z axiomů teorie množin je pravdivý. Aplikujeme-li tuto distinkci na Rortyho čtyři významy intuice, můžeme vidět, že první dva jsou příkladem intuice *that*, třetí a čtvrtý pak příkladem intuice *of*.³⁶

Intuice *of* se stala vlivným konceptem díky filozofii Immanuela Kanta, v níž se překrývá s Kantovým pojmem *Anschauung*, názor.³⁷ Smyslový názor je nám podle Kanta dán tím, že objekty působí na naše smysly, výsledkem tohoto působení na nás jsou časo-prostorově uspořádané počítky.³⁸ Věnujeme-li pozornost intuici *that*, musíme se zaměřit na jistý rozdíl mezi dvěma možnými pojetími, v nichž se můžeme inspirovat distinkcí, kterou představil Rorty. Podle prvního pojetí, tedy intuice jako nezduvodněného přesvědčení (tušení/předtuchy) nebývá obvykle intuice považována za zdroj znalostí. Parsons zdůrazňuje, že v tomto smyslu intuice, z toho, že někdo má intuici, že *p*, ještě nevyplývá, že *p*. Mluvíme-li o tom, že máme nějakou intuici, obvykle tím míníme něco jiného; například to, že před počátkem nějakého výzkumu inklinujeme k nějakému přesvědčení, případně se jedná o nezpochybňované common-sense přesvědčení. Intuice v tomto případě rozhodně nejsou chápány jako nutně pravdivé: common-sense přesvědčení se mohou ukázat jako chybná a být nahrazena jinými přesvědčeními. Jiným příkladem mohou být intuice rodilých mluvčích o tom, zda jsou některé věty gramatické, i v tomto případě nejsou intuice nutně pravdivé.³⁹ Je třeba zdůraznit, že intuici v těchto případech nelze považovat za znalost – není zde totiž z definice splněna podmínka zdůvodnění.

³⁴ Srovnej Rorty, R. *Intuition*, s. 204.

³⁵ Srovnej Parsons, Ch. *Mathematical Thought and Its Objects*, s. 139.

³⁶ Srovnej Parsons, Ch. *Mathematical Thought and Its Objects*, s. 140.

³⁷ V angličtině je termín *Anschauung* tradičně překládán termínem *intuition*.

³⁸ Srovnej Kant, I. *Kritika čistého rozumu*. Praha: Oikoymenh, 2001, A19/B33.

³⁹ Srovnej Parsons, Ch. *Mathematical Thought and Its Objects*, s. 138-139.

Příkladem opačného přístupu k intuici *that* jsou práce Reného Descarta, který s intuicí jakožto zdrojem znalosti spojuje silný pocit jistoty. Descartes používá termín *intuitio* pro pravdivé poznání, „(...) chápání čisté a pozorné mysli, které je natolik snadné a rozlišené, že naprosto nezbyvá žádná pochybnost o tom, co chápeme (...), které se rodí jedině ze světla rozumu a je jistější než sama dedukce (...).“⁴⁰ Tedy, pokud by se ukázalo, že propozice pocházející z intuice není pravdivá, pak bychom museli odmítnout, že se jednalo o intuici.

Máme tedy dvojí proti sobě jdoucí pojetí intuice *that*: první z nich nevidí důvod, proč považovat intuici za spolehlivý zdroj znalosti, nechápe ji jako zdroj zdůvodnění; druhé pojetí, reprezentované úvahami novověkých racionalistů, naopak považuje intuici za spolehlivý zdroj poznání. To podle Parsonse vede k nedorozuměním, užíváme-li propoziční intuici v prvním smyslu, ovšem spojujeme-li ji s jistotou, která pramení z druhého. To může vést čtenáře ke zvláštní představě intuice, kdy ji chápe v prvním, tedy spíše volnějším smyslu, ovšem s extra vlastností „být neomylný“.⁴¹

2.3 Analogie mezi percepcí a intuicí

Tím, co Gödel nabízí na podporu spolehlivosti matematické intuice, je analogie mezi ní a smyslovou percepcí. Argument, který na této analogii zakládá, bude východiskem pro další analýzu Gödelova pojetí intuice, a proto mu nyní věnuji více pozornosti. Cílem Gödelova argumentu z analogie je podpora důvěry v matematickou intuici jako ke zdroji znalosti – podle Gödela je intuice zdrojem zdůvodnění s přinejmenším stejnou mírou přesvědčivosti jako percepce:

„Avšak vzdor tomu, že jsou vzdáleny od smyslových zkušeností, máme něco jako vnímání [perception] i objektů teorie množin, jak je vidět z faktu, že se nám axiomy vnucují samy jakožto pravdivé. Nevidím žádný důvod, proč bychom měli mít menší důvěru k tomuto druhu vjemů, tj. matematické intuici, než k vnímání smyslovému, které nás vede k vytváření fyzikálních teorií a k očekávání, že další smyslové vjemy s nimi budou souhlasit, a navíc k víře, že otázka, která nyní není rozhodnutelná, má smysl a může být rozhodnuta v budoucnu. Paradoxy teorie množin jsou stěží větší překážkou pro matematiku, než smyslové klamy pro fyziku.“⁴²

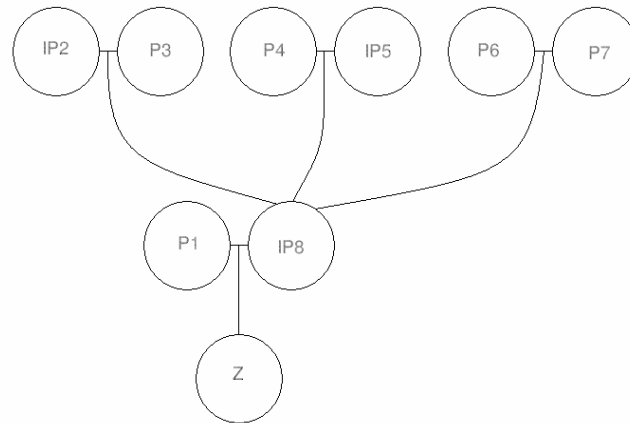
Všimněme si, že východiskem Gödelovy analogie je tvrzení, že smyslová data, která získáváme percepcí, považujeme obvykle za neproblematický zdroj znalosti. Klíčovou premisou, ač v textu explicitně nevyjádřenou, je pak tvrzení, že matematická intuice je se smyslovou percepcí v relevantních aspektech analogická. Právě tuto nevyjádřenou premisu se Gödel snaží podpořit řadou ilustrací – tedy výčtem analogických situací: axiomy teorie množin se nám „samy vnucují jakožto pravdivé“, což má být patrně analogie k bezprostřednímu získávání smyslových vjemů; zdůrazněna je analogická role intuice a percepce v rozhodování dosud nevyřešených problémů. Gödel načrtává analogii i mezi

⁴⁰ Descartes, R. *Regulae ad directionem ingenii/Pravidla pro vedení rozumu*. Praha: Oikoymenh, 2000, s. 23.

⁴¹ Srovnej Parsonse, Ch. *Mathematical Thought and Its Objects*, s. 141.

⁴² Gödel, K. Co je Cantorův problém kontinua? In Gödel, K. *Filosofické eseje*. Praha: Oikoymenh, 1999, s. 59-83. s. 80.

nerelovancí potenciálního útoku na spolehlivost daného zdroje poznání: smyslové klamy, které bychom mohli chápat jako zdroj omylnosti v případě smyslového vnímání, jsou stejně odhalitelné a zřejmě i stejně redukovatelné jako paradoxy teorie množin, které vedou k pochybnostem o spolehlivosti matematické intuice. Takto podpořená implicitní premisa o analogičnosti intuice a percepce pak společně s výchozím tvrzením, že percepci považujeme za neproblematický zdroj znalosti, vede k závěru, že matematickou intuici bychom rovněž měli uznat za neproblematický zdroj znalosti. Kvůli názornosti Gödelův argument můžeme znázornit v následujícím schématu:



P1: Percepci neproblematicky považujeme za zdroj znalosti.

IP2: Smyslová data získaná percepcí jsou nám bezprostředně dána.

P3: Axiomy teorie množin získané matematickou intuicí se nám „samy vnucují jakožto pravdivé.“

P4: Smyslová percepce nás vede k vytváření fyzikálních teorií a zdůvodněným očekáváním – tj. řešení dosud nerozhodnutých otázek.

IP5: Matematická intuice nás vede k vytváření matematických teorií a zdůvodněným očekáváním – tj. rozhodnutí hypotézy kontinua.

P6: Smyslové klamy je možné odhalit/redukovat, a proto nejsou překážkou pro spolehlivé poznání pocházející ze smyslové percepce.

P7: Paradoxy teorie množin je možné odhalit/redukovat, a proto nejsou překážkou pro spolehlivé poznání pocházející z matematické intuice.

IP8: V relevantních aspektech je matematická intuice a smyslová percepce analogická.

Z: Matematickou intuici bychom měli rovněž neproblematicky považovat za zdroj znalosti (minimálně ve stejné míře jako to děláme u smyslové percepce).

Obr. 1 Argumentační schéma: analogie percepce a intuice⁴³

⁴³ Symbol *P* vyjadřuje v textu explicitně vyjádřenou premisu, symbol *IP* implicitní, v textu nevyjádřenou premisu. Symbol *Z* vyjadřuje závěr argumentu.

Gödel tedy načrtává tři analogie mezi percepcí a intuicí, které považuje za klíčové vzhledem ke spolehlivosti daného zdroje:

- a) analogie bezprostřednosti dat získaných percepcí/intuicí
- b) analogie úspěšnosti důsledků přijatých dat pro fyzikální/matematickou teorii
- c) analogie redukovatelnosti omylů percepcie/intuice

Nás bude zajímat, vzhledem k položeným otázkám, především Gödelovo představení první a třetí analogie, které se pokusím rozvést pasážemi z dalších Gödelových prací, které se k těmto analogiím vztahují. První analogie nám umožní zodpovědět otázku (1) O jaký typ intuice se jedná? Třetí analogie nám poslouží jako klíč k zodpovězení otázky (2) Jedná se o spolehlivý zdroj znalosti? Na základě předložených analogií a doplňujících informací se pak pokusím zodpovědět otázku (3) Podává Gödel nějaké vysvětlení mechanismu intuice?

2.3.1 Je Gödelova intuice *that* nebo *of*?

Vyjděme z premis, jimiž Gödel dokládá analogičnost bezprostřednosti získaných dat: data pocházející z intuice i z percepcie se nám bezprostředně vnucují jako pravdivá. Co přesně ale Gödel srovnává?

IP2: Smyslová data získaná percepcí jsou nám bezprostředně dána.

P3: Axiomy teorie množin získané matematickou intuicí se nám „samy vnucují jakožto pravdivé.“

Colin Cheyne upozorňuje na to, že můžeme-li rozlišit intuici *that* a *of*, je tomu stejně i u percepcie – tedy, že i v případě percepcie můžeme rozlišit mezi percepcí *that* a percepcí *of*. Mohu vidět strom (tj. percepcie *of*) a mohu vidět, že strom se kymácí (percepcie *that*). Obvykle se má podle Cheyna za to, že percepcie *of* předchází percepci *that* – a že je možné mít první z nich bez druhé: tedy vnímat nějaké objekty bez toho, abychom vnímali, že se tyto objekty nachází v nějakém stavu: můžu vidět stromy bez toho, že bych viděla, že se kymácí, nebo dokonce bez toho, že bych věděla cokoliv o stromech. Podle jiných vysvětlení je ale percepcie *that* chápána jako fundamentálnější: pouze, vnímám-li, že něco se má tak a tak, pak vnímám objekty, které se v tomto stavu vyskytují – podle této verze pak není možné mít perceptuální znalost bez percepcie *that* i *of*.⁴⁴

S jakým typem percepcie tedy Gödel intuici srovnává? Má-li být totiž analogie funkční, měla by být vedena mezi typově podobnými zdroji znalosti – tedy buď mezi intuicí *of* a percepcí *of*, nebo mezi intuicí *that* a percepcí *that*. Jak ale upozorňuje Parsons, Gödelovo srovnání je zde poněkud matoucí.⁴⁵ Klíčovou pasáží je tato Gödelova formulace: „Avšak vzdor tomu, že jsou vzdáleny od smyslových zkušeností, máme něco jako vnímání

⁴⁴ Srovnej Cheyne, C. Getting in Touch with Numbers: Intuition and Mathematical Platonism. *Philosophy and Phenomenological Research*, vol. 57, no. 1 (1997), s. 111-125. s. 119. Dostupné z WWW: <<http://www.jstor.org/stable/2953780>>.

⁴⁵ Srovnej Parsons, Ch. Platonism and Mathematical Intuition in Kurt Gödel's Thought, s. 59.

[perception] i objektů teorie množin, jak je vidět z faktu, že se nám axiomy vnucují samy jakožto pravdivé.⁴⁶ Podle Gödela tedy máme něco jako vnímání objektů teorie množin – tady by zřejmě mohla být vedena analogie s percepcí fyzických objektů a jednalo by se o percepci/intuici *of*. Následně ale Gödel dodává, že toto vnímání je pouze vyvozeno z faktu, že jsou nám bezprostředně dány axiomy – jako primární tedy Gödel zdůrazňuje intuici *that*. Ta tedy, jak se zdá, pro Gödela hraje primární roli, tj. předchází intuici *of*. To potvrzuje i zpráva od Gödelova životopisce Hao Wanga, s nímž údajně Gödel v rozhovorech téměř vždy mluvil o intuici propozičního typu. Mimoto uvádí konkrétní ilustraci dat pocházející z intuice:

„(...) mám dojem, že matematická intuice je pro něj primárně naše intuice, že *jisté propozice jsou pravdivé* – takové jako *modus ponens*, matematická indukce, 4 je sudé číslo, některé z axiomů teorie množin atd. Pouze odvozeně můžeme také mluvit o percepci množin a pojmů jako o matematické intuici.“⁴⁷

Jaký je tedy vztah mezi druhou a třetí premisou Gödelovy analogie? Podle Gödela jsou to axiomy teorie množin, co je nám bezprostředně dáno intuicí – a axiomy mají propoziční charakter. Na druhé straně analogie ovšem stojí smyslová zkušenost, v jejímž případě se jedná o percepci v objektovém smyslu. Toto Gödelovo srovnání ovšem nemusíme chápat jako chybu v analogii, lepším vysvětlením může být to, že se jedná o určitou zkratku. Podle Wanga zůstává Gödelova analogie se smyslovou percepcí funkční: situace je obdobná v obou případech – analogie je totiž podle něj vedena mezi intuicí a percepcí *that*: „(...) mezi tím, že chápeme naše přesvědčení o malých celých číslech jako pravdivá a naše přesvědčení o středních fyzických objektech jako pravdivá.“⁴⁸ Primárně tedy máme propoziční intuice, na jejichž základě teprve vyvozujeme, že existují objekty, o nichž jsou tyto naše propoziční intuice pravdivé. Gödel je tedy zastáncem druhého přístupu – stejně jako nelze mít perceptuální znalost bez percepcce *that* i *of*, tak i jeho intuice *that* (jako zdroj znalosti) zahrnuje intuici *of*. Jaká jsou data, která získáváme matematickou intuicí? Gödel je charakterizuje takto:

„Evidentně to »dané«, na čem se zakládá matematika, je těsně spjato s abstraktními prvky obsaženými v našich empirických idejích. Z toho však v žádném případě neplyne, že data tohoto druhého druhu, protože nemohou být spojována s působením určitých věcí na naše smyslové orgány, jsou něčím čistě subjektivním, jak tvrdil Kant. Spíše mohou představovat nějaký aspekt objektivní reality, avšak v protikladu k vjemům, mohou v nás být přítomné díky jinému druhu vztahu mezi námi a realitou.“⁴⁹

⁴⁶ Gödel, K. Co je Cantorův problém kontinua?, s. 80.

⁴⁷ „(...) my impression is that mathematical intuition for him is primarily our intuition *that certain propositions are true* – such as *modus ponens*, mathematical induction, 4 is even numer, some of axiom set theory and so on. Only derivately may we also speak of the perception of sets and concepts as mathematical intuition.“ Wang, H. *A Logical Journey: From Gödel to Philosophy*. Cambridge: MIT Press, 1996, s. 226-227. Dostupné z WWW: <http://www.google.cz/books?id=pckvCy6L_ocC&hl=cs&source=gbs_navlinks_s>. [kurziva – I. S.].

⁴⁸ „(...) between our seeing our beliefs about small integres as true and our seeing our beliefs about medium-sized physical objects as true.“ Wang, H. *A Logical Journey: From Gödel to Philosophy*, s. 230.

⁴⁹ Gödel, K. Co je Cantorův problém kontinua?, s. 81.

Gödel mluví o datech druhého druhu, která se liší od dat získaných smyslovou percepcí. Gödel totiž z analogie mezi percepcí a intuicí vyvozuje, že je-li percepce založena primárně na počítcech, pak tu musí být také nějaká bezprostřední data, která získáváme intuicí. Tato data ovšem nepocházejí ze smyslové percepcce a nepocházejí ani z lidské mysli, Gödel je nazývá trochu mysteriózním způsobem jako data druhého druhu. Máme tedy dva typy dat: Prvním typem dat jsou počítky, tedy data, která pocházejí ze smyslové percepcce a jsou materiálem pro naše ideje fyzických předmětů. Druhým typem jsou „data druhého druhu“. Ty je podle Wangovy interpretace možné rozlišit na (a) bezprostředně daná data jiná než počítky, na jejichž bázi tvoříme naše smyslové ideje – ty Gödel nazývá abstraktními prvky obsaženými v našich idejích; (b) to „dané“ tvořící matematiku.⁵⁰ Jak upozorňuje Wang, Gödel nenabízí žádnou přesnější charakteristiku těchto dat „druhého druhu“, to ale neznamená, že o nich z jeho komentářů nelze nic odvodit.

Percepce i data druhého druhu představují podle Gödela vstupy pro proces myšlení – myšlení samo totiž není schopno takový vstup dodat. Důležitým předpokladem této úvahy je Gödelova teze, podle níž naše myšlení není schopné stvořit nové kvalitativně odlišné elementy, ale pouze reprodukovat a kombinovat ty, které jsou mu dané.⁵¹ Tedy, (a) pokud by naše mluvení o fyzických objektech nebylo nic víc než aplikace myšlení na smyslové percepcce, neměli bychom abstraktní pojmy takové jako idea objektu a (b) pokud by matematika nevycházela z ničeho jiného než z myšlení, nebyli bychom vůbec schopni dojít k takovým idejím, jako je množina nebo číslo (body (a) a (b) zde odkazují ke dvojímu typu dat druhého druhu představenému výše). V obou případech je to proto, že tyto ideje nemohou být získány pouze kombinatorickým přeskupením, které je podle Gödelova názoru tím jediným, čeho může samotné myšlení dosáhnout.⁵²

2.3.2 Je intuice spolehlivým zdrojem znalosti?

Vyjdeme-li tedy z právě provedeného přiřazení, považují Gödelem představenou intuici za propoziční intuici. Příkladem takovéto intuice může být propozice, že číslo 4 je sudé číslo. Takovouto intuici je možné v intencích, které byly zmíněny výše, chápat jako spolehlivý nebo nespolehlivý zdroj znalosti. O jaký zdroj se jedná v Gödelově případě? Vyjděme opět z analogie představené v argumentu:

P6: Smyslové klamy je možné odhalit/redukovat, a proto nejsou překážkou pro spolehlivé poznání pocházející ze smyslové percepcce.

P7: Paradoxy teorie množin je možné odhalit/redukovat, a proto nejsou překážkou pro spolehlivé poznání pocházející z matematické intuice.

⁵⁰ Srovnej Wang, H. *A Logical Journey: From Gödel to Philosophy*, s. 228.

⁵¹ Srovnej Gödel, K. Co je Cantorův problém kontinua?, s. 81.

⁵² Srovnej Potter, M. Was Gödel a Gödelian Platonist? *Philosophia Mathematica*, vol. 9, no. 3 (2001), s. 331-346, s. 340. Dostupné z WWW: <<http://philmat.oxfordjournals.org/content/9/3/331.short>>.

V souvislosti s touto analogií si povšimněme drobné korekce, kterou Gödel učinil ve výše citovaném textu z článku „Co je Cantorův problém kontinua?“ v rozhovorech s Wangem v roce 1975, když do textu vložil následující ilustraci:

„Nevidím žádný důvod, proč bychom měli mít menší důvěru k tomuto druhu vjemů, tj. matematické intuici (...), než k vnímání smyslovému [»chápanému v obecnějším smyslu, včetně např. sledování města z letadla (...)].“⁵³

Co nám tato vsuvka napovídá? Gödel se snaží ilustrovat omylnost smyslové percepce, resp. její možnou prvotní nepřesnost, kterou je ale možné postupně opravovat a redukovat: město z letadla vidíme v mnohém velmi nepřesně a podléháme klamům – zdá se nám menší, uniká nám řada detailů, některé jeho důležité prvky můžeme dokonce přehlédnout. Přiblížíme-li se však blíž nebo budeme-li se městem procházet, můžeme tyto původní nepřesnosti korigovat. Využijeme-li analogie, pak některé naše matematické intuice mohou být podobně nejprve nepřesné, Gödel zde explicitně mluví o paradoxech teorie množin, ovšem jsou postupně vyjasňovány a zpřesňovány – a omyly odstraňovány. Je tedy možné mít omylné matematické intuice stejně, jako je možné podléhat smyslovým klamům? Podle Gödela zcela zřejmě ano, matematická intuice je v principu omylná stejně jako percepce. Omylnost percepce nám ale nebrání v tom, abychom ji pokládali za spolehlivý zdroj znalosti, dokážeme-li se s touto omylností nějak vypořádat. Podle vedené analogie by nám tedy neměla vadit ani omylnost intuice, pakliže i s ní si budeme umět poradit. Věnujme pozornost tomuto Wangově shrnutí:

„Fundamentální je fakt, že *rozumíme matematickým pojmům – nebo spíše, že chápeme určité propozice o nich jako pravdivé*. Tento fakt musí mít objektivní základ, a tedy musí existovat matematická data druhého druhu (...). Nejsme schopni přesně specifikovat tato data, ale víme, že např. jednoduché počítání s celými čísly je tak jisté, jako téměř cokoliv, co víme.“⁵⁴

Jak Wang zdůrazňuje, primární pro naši intuici je, že určité propozice považujeme za pravdivé. To je formulace, kterou Wang využívá k nahrazení nepřesného vyjádření, podle něhož je základním faktem intuice to, že rozumíme našim pojmům. Může se totiž ukázat, že pojmům nerozumíme – pojmy v našich propozicích se mohou ukázat jako zmatené a nepřesné – a naše intuice tudíž jako omylné. Jak ale mohou být naše intuice omylné, resp. jak se můžeme mýlit v něčem, co se nám bezprostředně nutí jakožto pravdivé?

⁵³ „I don't see any reason to why we should have less confidence in this kind of perception and more generally, in mathematical intuition (...) than in sense perception [»taken in more general sense, including, for instance, looking at a city from an airplane“ (...)]. Wang, H. *A Logical Journey: From Gödel to Philosophy*, s. 226.

⁵⁴ „The fundamental fact is that *we understand mathematical concepts – or rather, that we see that certain propositions about them are true*. This fact must have some objective basis, and so there must be some mathematical data of second kind (...). We are not able to specify these data exactly, but we know that, for instance, simple computations about integers are as certain as almost anything we know.“ Wang, H. *A Logical Journey: From Gödel to Philosophy*, s. 239. [kurziva – I. S.]

Gödel mluví o tom, že se naše původní intuice mohou ukázat jako vágní či zmatené, a dokonce i naše axiomy, kterými se snažíme intuice vyjádřit, se proto mohou posléze ukázat jako nepravdivé. To ale není dáno tím, že by objekty naší intuice byly vágní nebo dokonce sporné, „[p]aradoxy pouze ukazují neadekvátnost naší percepce (...) pojmů (...) spíše než by vrhaly pochybnost na předmět.“⁵⁵ Problém je v naší netrénované schopnosti intuice: napoprvé daný matematický objekt či pojem prostě nevnímáme jasně. Věnujme se představené analogii: město z letadla nevnímáme napoprvé zcela jasně, náš popis města by tedy mohl být zmatený nebo dokonce sporný. Podobně to může být s vnímáním např. pojmů teorie množin, která ve své naivní variantě vedla k paradoxům. Gödel vidí cestu z omylnosti v tom, že naše nepřesné pojmy postupně zpřesňujeme – a to děláme vhodnou formalizací: „[h]istoricky, mnoho zajímavých otázek bylo zodpovězeno, nebo alespoň vyjasněno, teprve poté, co byly formalizovány klíčové pojmy – takové jako spojitost, plocha, konstrukce pravítkem a kružítkem, teorém, množina atd.“⁵⁶ Gödel udává následující ilustraci: vždycky jsme měli např. (vágní) intuitivní pojem mechanické procedury, ale jasně jej vnímáme až nyní, když známe Turingovu formalizaci.⁵⁷

Gödel v ilustracích opakovaně používá paralelu mezi nástrojem přiblížení a naší schopností formalizovat pojmy: je to „jako [když] vidíme zvíře z dálky nebo dvě hvězdy jako jednu předtím, než použijeme teleskop.“⁵⁸ V čem se formalizace podobá teleskopu? Klíčovým kritériem je zřejmě pro oba nástroje přesnost: striktnost formalizovaného pojmu vede k rozhodnutím v případech, kde je užití intuitivního pojmu nedostatečné. Proces dialektiky intuice a formalizace se pak podle Gödela ukazuje jako (historicky) spolehlivý způsob rozšiřování matematické znalosti.

2.3.3 Jaký je mechanismus intuice?

Gödelův argument nám tedy dává následující informace ohledně intuice: jedná se o zdroj, který nám poskytuje jako bezprostřední data propozice o matematických objektech; zároveň víme, že se jedná o zdroj sice omylný, ovšem jeho omylnost lze redukovat. Jakým způsobem ale získáváme tato data?

Je třeba říci, že Gödel v žádném ze svých publikovaných prací popis onoho „jiného druhu spojení mezi námi a realitou“ nepodává. Chceme-li se tedy přiblížit jeho představě, je třeba nahlédnout do nepublikovaných spisů. Je ovšem třeba přistoupit na riziko, že takto získané informace mohou být neúplné, ve stádiu návrhů, nápadů, a lze je tudíž těžko považovat za zcela seriózní, stejně tak si musíme být vědomi toho, že Gödel zřejmě měl důvody, proč tyto své úvahy nezveřejňoval.

⁵⁵ „The paradoxes only show unadequacy of our perception (...) of concepts (...) rather than throw doubt on the subject matter.“ Wang, H. *A Logical Journey: From Gödel to Philosophy*, s. 236.

⁵⁶ „Historically, many interesting questions were answered, or at least clarified, only after the crucial concepts – such as continuity, area, construction by ruler and compass, theorem, set, etc. – had been formalized.“ Wang, H. *A Logical Journey: From Gödel to Philosophy*, s. 235.

⁵⁷ Srovnej Wang, H. *A Logical Journey: From Gödel to Philosophy*, s. 232.

⁵⁸ „(...) as we seen animal from away or take two stars for one before using the telescope.“ Wang, H. *A Logical Journey: From Gödel to Philosophy*, s. 232.

Analýza výše představeného argumentu z analogie mezi percepcí a intuicí nám posloužila k tomu, abychom viděli, jak je Gödelův argument vystaven a k jakému závěru směřuje. Podle všeho se Gödel v textu „Co je Cantorův problém kontinua?“ pouze snažil podpořit naši důvěru v intuici. Podle informací Hao Wanga ovšem můžeme vyvozovat, že tato analogie měla pro Gödela daleko větší význam. Gödel z podobnosti percepce a intuice vyvozuje i analogii v popisu přístupu k daným objektům. Konkrétně: jsou-li zdrojem našich percepcí smyslové orgány, pak zdrojem intuice je rovněž nějaký orgán: orgán pro intuici. Gödelovy spekulace v rozhovorech s Wangem jsou následující:

„Percepce pojmů může být činěna buď nějakým vnitřním orgánem, nebo vnitřní intuicí (...) neužívající žádný speciální orgán. Domnívám se, že nějaký fyzický orgán je pro ni nutný.“⁵⁹

„Takový smyslový orgán by musel úzce souviset s neurálním centrem pro jazyk. Ale jednoduše nyní nevíme dost a primitivní teorie o těchto otázkách je v současné fázi pravděpodobně srovnatelná s teorií atomů tak, jak ji formuloval Demokritos.“⁶⁰

Uvědomme si lákavost takto uvažovaného orgánu intuice, který Gödel spojuje s jazykovým centrem mozku – jeho existence by potvrdila Gödelův názor, že matematická data nepocházejí z lidské mysli, zároveň by mohla (po vhodném vysvětlení) být snad i přesvědčivou odpovědí na epistemologickou výzvu Benacerrafa i Fielda.⁶¹ Jenomže Gödelovo postulování orgánu pro jiný druh spojení je značně problematické a tato problematičnost zdaleka nespojuje se současnou úrovní vývoje teorie. Otázkou je, jak si tento orgán představit. A proč jej Gödel nazývá smyslovým orgánem?

Zrekapitulujme: platónské matematické objekty byly v úvodní kapitole charakterizovány jako abstraktní a nezávislé. Při charakterizaci abstraktnosti platónských objektů bylo zdůrazněno, že se jedná o opozici ke konkrétním časo-prostorovým objektům, které s námi vstupují do kauzálních vazeb. Tedy, konkrétní objekty na nás mohou kauzálně působit, abstraktní z principu ne. Podstatou percepce je kauzální vztah: působení fyzických objektů na naše smyslové orgány. Přijmeme-li Gödelovu úvahu o orgánu intuice, pak by vzhledem k řečenému měl být podstatou intuice, která se vztahuje k abstraktním objektům, *ne*kauzální vztah, kdy ovšem (stejně jako v percepci) také nastává určité působení na náš orgán intuice.

Gödelovo postulování smyslového orgánu intuice, jak se zdá, vede ke sporu – nekauzální vztah by totiž zahrnoval nějaký druh působení a byl by tedy „tak trochu kauzální“. To je ale sporné: jak si představit nekauzální působení? Vyjdeme-li z tohoto obecného pojetí,

⁵⁹ „The perception of concept may either be done by some internal organ or just by an inner perception (...) using no special organ. I conjecture that some physical organ is necessary for it.“ Wang, H. *A Logical Journey: From Gödel to Philosophy*, s. 235.

⁶⁰ „Such a sensory organ must be closely related to the neural center of language. But we simply do not know enough now, and the primitive theory on such questions at the present stage is likely to be comparable to the atomic theory as formulated by Democritus.“ Wang, H. *A Logical Journey: From Gödel to Philosophy*, s. 233.

⁶¹ Srovnej Solomon, Martin K. On Kurt Gödel's Philosophy of Mathematics. [online]. Dostupné z WWW: <<http://evans-experientialism.freewebspace.com/solomon01.htm>>. [cit. dne 2012-05-05].

pak zmíněný orgán pro intuici nelze považovat za smyslový orgán podobný zraku nebo čichu – z definice totiž nezahrnuje kauzalitu a nemůže fungovat obdobně.⁶² Někjaký nekauzální vztah mezi abstraktními objekty a částí našeho mozku, kdy dochází k působení těchto objektů na mozek, se pak zdá jen těžko obhajitelný. „Jiný druh vztahu“ nemůže být analogický ve zde relevantním aspektu, kterým by byla kauzalita.⁶³ Navíc, pokud bychom přistoupili na to, že se jedná o (nějak) kauzální vztah, pak už by nemohlo jít o abstraktní objekty, tedy nešlo by o platonismus.

James R. Brown se snaží Gödelovu analogii podpořit, podle něj jeho analogie neselhává. Brown ovšem volí poměrně nešťastný způsob obhajoby. Podle jeho názoru totiž ani proces percepce není dostatečně popsán, a je tak vlastně stejně mystický, tedy nevysvětlený, jako platónský proces intuice. A přijímáme-li mystický proces percepce, proč bychom nepřijali obdobný platónský?

„V případě běžné zrakové percepce, řekněme, čajového šálku, věříme, že fotony přicházejí z fyzického šálku před námi, vstupují do našeho oka, interagují s retinálními receptory a řetězci neurálních spojení skrze zrakovou dráhu ke zrakovému kortexu. Po tomto už nevíme nic o tom, jak se vytváří přesvědčení. Spojení mezi myslí a mozkiem je velký problém filozofie mysli. Samozřejmě existují nějaké neúplné domněnky, ale bylo by naprosto matoucí tvrdit, že to je nějakým způsobem ‘pochopeno’. Část procesu poznání je dobře pochopena; ale zůstávají prvky, které jsou právě tak mysteriózní jako cokoli, co nabízí platonik.“⁶⁴

Ovšem, zdá se, že Brown svou obhajobou takřikajíc pláče na špatném hrobě. Zatímco u percepce snad nemáme dostatečně vysvětlenou část procesu (konkrétně tvorba přesvědčení ze smyslových dat), u intuice není dostatečně vysvětlen celý proces (tvorba přesvědčení plus způsob získání těchto dat). Analogie mysterióznosti percepce a intuice tak opět není funkční, protože nás zajímá u intuice právě ta část procesu, která je u percepce „dobře pochopena“.⁶⁵

Myšlenku orgánu pro intuici jakožto mechanismu intuice musíme tedy odmítnout. Jiné řešení tohoto „jiného druhu vztahu mezi námi a realitou“ Gödelovy texty, pokud je mi známo, nenabízejí. Zatímco bychom mohli ve výše přestaveném argumentu uznat, že porovnávané aspekty jsou v relevantních aspektech analogické – tedy v bezprostřednosti potenciálních dat

⁶² Spíše se tedy zdá, že Gödel byl ve své úvaze ohledně existence smyslového orgánu intuice veden druhou charakteristikou platónských objektů – totiž jejich nezávislosti na nás, kde analogie mezi fyzickými a matematickými objekty dobře funguje.

⁶³ Srovnej Cheyne, C. *Getting in Touch with Numbers: Intuition and Mathematical Platonism*, s. 121.

⁶⁴ In the case of ordinary visual perception, of, say, a teacup, we believe that photons come from the physical teacup in front of us, enter our eye, interact with the retinal receptors and a chain of neural connections through the visual pathway to the visual cortex. After that we know virtually nothing about how beliefs are formed. The connection between mind and brain is the great problem of philosophy of mind. Of course, there are some sketchy conjectures, but it would be completely misleading to suggest that this is in anyway ‘understood’. Part of the process of cognition is well understood; but there remain elements which are just as mysterious as anything the platonist has to offer.“ Brown, J. R. π in the Sky. In Irvine, A. D. (ed.) *Physicalism in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1990, s. 95-120. s. 108.

Dostupné z WWW: <http://books.google.cz/books?id=KhUIY9sZVjkC&hl=cs&source=gbs_navlinks_s>.

⁶⁵ Srovnej Cheyne, C. *Getting in Touch with Numbers: Intuition and Mathematical Platonism*, s. 121-122.

a spolehlivosti zdroje – vyvozujeme-li podobnost i ve fungování jednotlivých „orgánů“ percepcie a intuice, analogie selhává.

2.4 Benacerraf, Field a Gödelova odpověď

Shrňme tedy informace o Gödelem představené intuici. Gödel ji považuje za zdroj bezprostřední znalosti matematických propozic, vyvozuje z ní i znalost objektů vyskytujících se v těchto propozicích (nelze mít intuici *that* bez intuice *of*). Zároveň si uvědomuje určitou omylnost tohoto zdroje znalosti, upozorňuje ale, že tato omylnost je v principu redukovatelná. Toto jsou pozitivní Gödelova tvrzení o intuici vyvozená z jeho analogie s percepcí. Pokročíme-li v analýze, objevují se potíže: Gödel charakterizuje intuici jako „jiný druh vztahu mezi námi a realitou“, zkouáme-li ovšem možné Gödelovo vysvětlení tohoto vztahu, nacházíme se v situaci, která není pro jeho pojetí intuice nijak optimistická: buďto přijmeme jeho představu smyslového orgánu pro intuici, která se ale ukazuje být sporná, nebo ji odmítneme a stojíme tak opět před nevysvětleným zdrojem matematické znalosti, o němž víme pouze to, že nám poskytuje bezprostřední přesvědčení o propozicích. A to je právě místo, na které útočí oba diskutovaní kritici platonismu.

Zdá se, že Benacerrafovi by měla být sympatická Gödelova analogie mezi matematikou a fyzikou – jedná se přece o návrh, který splňuje Benacerrafovy požadavky na jednotné vysvětlení znalosti. Gödel klade na osobu matematika i na fyzika stejný nárok: aby mohli mít znalost, musí mít oba kontakt s realitou a získat bezprostřední data – ať už se jedná o smyslová data nebo o data „druhého druhu“. V Gödelově řešení můžeme identifikovat (jednotnou) externalistickou epistemologickou pozici – pro vědu i matematiku. Externalisté tvrdí, že pro získání poznání je třeba přiměřeného externího spojení mezi přesvědčením a tím, co činí toto přesvědčení pravdivé. Podle Goldmana se za vhodné externí spojení považuje kauzální nebo perceptuální spojení:

S ví, že *p*, pokud fakt, že *p*, je kauzálně/perceptuálně spojen s přesvědčením *S*, že *p*.

Provedeme-li důkladnou analogii i zde, pak

S ví, že *p*, pokud (matematický) fakt, že *p*, je spojen intuicí s přesvědčením *S*, že *p*.

Zdalo by se tedy, alespoň na první pohled, že Gödelův návrh by měl vyhovovat Benacerrafovým nárokům. Jak ovšem můžeme vyvodit z výše uvedeného představení, není tomu tak – Benacerraf označuje Gödelovu analogii za „nanejvýš povrchní.“⁶⁶ Problém podle něj spočívá v absenci vysvětlení, jak se nám axiomy mohou samy vnucovat jakožto pravdivé: „Co *přesně* chybí je to, co požaduje můj druhý princip: vysvětlení spojení mezi našimi kognitivními schopnostmi a objekty poznání.“⁶⁷ Podle Benacerrafa, odvozujeme-li axiomy

⁶⁶ Srovnej Benacerraf, P. *Mathematical Truth*, s. 674-675.

⁶⁷ „For what is missing is precisely what my second principle demands: an account of the link between our cognitive faculties and the objects known.“ Benacerraf, P. *Mathematical Truth*, s. 674.

z našich nejjasnějších intuicí, pak bychom měli být schopni vysvětlit alespoň to, jak víme tyto nejjasnější propozice. Benacerraf zřejmě neznal Gödelovy pozdní úvahy ohledně smyslového orgánu intuice, mám ovšem za to, že by je nepřijal z důvodů uvedených výše: Gödelovo řešení se zdá být sporné, nadále nám chybí dostatečně přesvědčivé vysvětlení mechanismu, jakým jsou abstraktní objekty kauzálně spojeny se „smyslovým“ orgánem intuice.

Field pak explicitně útočí na tento bod Gödelovy argumentace – jak může Gödel tvrdit, že poznává matematické objekty (tj. tezi epistemologického platonismu), když nedokáže představit přesvědčivé vysvětlení mechanismu, kterým k této znalosti dospívá? Vyjdeme-li z tohoto stanoviska, můžeme jej dále rozvinout: neznáme-li spolehlivý mechanismus, pak bychom se podle Fielda ani neměli spoléhat na propozice, které Gödel pokládá za pravdivé. A co víc, nemáme vlastně ani žádný důvod věřit Gödelem vystavěné analogii: tomu, že se jedná o intuici propozic, nebo tomu, že je tato intuice omylným zdrojem. Nemáme důvod intuici přijmout.

Na závěr se zaměříme ještě na jednu možnou Gödelovu odpověď. Pokud Benacerraf s Fieldem nepřijali matematickou intuici na základě předchozích dvou srovnání, která Gödel ve své argumentaci nabídl, mohlo by být zajímavé prozkoumat jeho poslední analogii, totiž úspěšnost přijetí matematické intuice:

P4: Smyslová percepce nás vede k vytváření fyzikálních teorií a zdůvodněným očekáváním – tj. řešení dosud nerozhodnutých otázek.

IP5: Matematická intuice nás vede k vytváření matematických teorií a zdůvodněným očekáváním – tj. rozhodnutí hypotézy kontinua.

Gödel v této analogii tvrdí, že bychom měli matematickou intuici přijmout za alespoň tak důvěryhodný zdroj znalosti jako percepci jednoduše proto, že její přijetí je pragmatické co se týče jejich důsledků – jedná se heuristický krok. V rozhovorech s Wangem se Gödel v této souvislosti odvolává např. na „jako-kdyby“ stanovisko Abrahama Robinsona, podle kterého je úspěšné chovat se, jako kdyby matematické objekty existovaly,⁶⁸ v textu „Co je Cantorův problém kontinua?“ dokonce chápe tento princip jako alternativní kritérium pro přijetí pravdivosti axiomů: „(...) kromě matematické intuice existuje jiné (byť jen pravděpodobné) kritérium pravdivosti matematických axiomů, totiž jejich plodnost v matematice (...).“⁶⁹ Tedy, shrneme-li tyto dvě myšlenky: i kdyby intuice nebyla důvěryhodným zdrojem, je přesto výhodné ji jako důvěryhodný zdroj přijmout, protože nám to umožní rozvíjet matematické teorie.

Je zřejmé, že se tato úvaha pokouší vyhnout Benacerrafově i Fieldově kritice: na námitku nezdůvodněnosti matematických přesvědčení, která by měla podle Fielda vést k odmítnutí intuice, nijak neodpovídá. Přijímá ji sice jako možnou, ale vzhledem ke (zřejmě vyššímu) kritériu úspěšnosti matematiky, jako příliš slabou. Odmítá tedy přistoupit na Fieldův závěr, podle něhož „(...) *zdá-li se v principu nemožné to vysvětlit, pak to znemožňuje*

⁶⁸ Srovnej Wang, H. *A Logical Journey: From Gödel to Philosophy*, s. 240.

⁶⁹ Gödel, K. Co je Cantorův problém kontinua?, s. 82.

víru v matematické entity, navzdory jakýmkoliv důvodům, které můžeme mít pro to, abychom v ně věřili.“ Tuto odpověď tedy je možné chápat jako zdůvodněnou vzhledem k pragmatice, ovšem nelze ji považovat za seriózní řešení epistemologické námitky v rámci kritérií, jež stanovil Field.