Paradoxy v systémech R. Dedekinda a G. Frega

Jana Roztočilová, Katedra filozofie FF Západočeské University v Plzni

Abstrakt: Tento článek se zabývá dvěma aritmetickými systémy - konkrétně systémem, který představil R. Dedekind a systémem, který vytvořil G. Frege - a paradoxy, které se zde vyskytují - tedy Burali-Fortiho paradoxem (což je vůbec první fomrulace moderního paradoxu), Cantorovým paradoxem a Russellovým paradoxem. Hlavním cílem je ukázat, co mají tyto paradoxy společného a zdůvodnit, že ačkoli se tyto paradoxy vyskytují v různých systémech, mají společné znaky. Na základě studia uvedených systémů, paradoxů i různých řešení těchto paradoxů, autorka dospívá k tvrzení, že zkoumané paradoxy vznikají na stejném základě, a to na základě problému nehierarchizovanosti.

V dodatku tohoto článku navíc čtenář nalezne dva zajímavé historické exkurzy. První z nich předkládá v historicky autentické podobě odvození Burali-Fortiho paradoxu Druhý exkurz je věnován Russellovu paradoxu a představuje jej nejen v podobě, jak jej vyjádřil B. Russell, ale také ve formulaci G. Frega.

Abstract: This paper deals with two arithmetical systems -namely with the system presented by R. Dedekind and the system established by G. Frege - and with paradoxes there occurring - namely with the Burali-Forti paradox (the first formulation of modern paradox at all), the Cantor´s paradox and the Russell´s paradox. The main purpose is to show in what way are these paradoxes similar and that although these paradoxes occur in different systems, they have common features. On the basis of studying these systems and paradoxes and also ways out from these paradoxes, the author reached the conclusion that the investigated paradoxes arise from the same source, namely the problem of nonhierarchization.

In addition, the Appendix of this article presents the Burali-Forti paradox in the form that shows the historically authentic way of derivation of this paradox. There is also a short exposition of Russell´s paradox in the Appendix. It shows the paradox not only in the form presented by B. Russell but also in the G. Frege´s formulation.

Klíčová slova: Burali-Fortiho paradox; Cantor; Dedekind; Frege; paradox; Russell

Keywords: The Burali-Forti paradox; Cantor’s paradox; Russell’s paradox; Dedekind; Frege; Russell

Paradoxy v systémech R. Dedekinda a G. Frega

Přelom 19. a 20. století byl obdobím hledání formálních základů matematiky. Ve většině axiomatických systémů usilujících o formalizaci matematiky se však objevují paradoxy. První pokusy o vybudování formální axiomatizované teorie matematiky tak dříve či později troskotají na nějakém paradoxu. Ačkoli se tyto systémy v důsledku paradoxu hroutí, objevení paradoxu paradoxně představuje ve vývoji matematiky významný krok kupředu. Pokusy o odstranění paradoxů byly totiž podstatným impulsem pro rozvoj moderní matematiky a logiky.

Ve svém příspěvku se zaměřím na paradoxy spojené se systémy R. Didekinda a G. Frega. Přestože byly tyto systémy vytvořeny nezávisle na sobě a měly různou podobu, paradoxy, které se v nich vyskytují, vznikají na stejném základě, který je společným rysem těchto systémů. Tímto společným rysem je, jak uvidíme, že žádný ze systémů nemá nijak určenou hierarchii předmětů a umožňuje vznik paradoxů tím, že neomezuje, jaké předměty mohou náležet do množiny či spadat pod pojem.

V tomto článku nejprve představím oba zkoumané systémy a poté seznámím čtenáře s paradoxy, které jsou s těmito systémy spojeny. Na to naváži částí, která je zaměřena na jejich společné rysy a v níž docházím k závěru, že problémy spojené se zkoumanými systémy jsou pouze instancemi problému jediného, a to problému nehierarchizovanosti. Za závěrečnou sumarizující část připojuji dodatek v podobě dvou historických exkurzů. V prvním se věnuji pokud možno srozumitelnému a přitom historicky co nejvěrnějšímu popisu Burali-Fortiho paradoxu; ve druhém se zaměřuji na Russellův paradox nejen v jeho původní (Russellově) formulaci, ale také v podobě odpovídající systému, v němž byl objeven (tedy v podobě odpovídající Fregeho Grundgesetze).

1 Systémy R. Dedekinda a G. Frega

Oba systémy, jimiž se budeme v tomto článku zabývat, byly vytvořeny se stejným záměrem, a to vybudovat formální systém teorie (přirozených) čísel. Ale jelikož autoři těchto systémů měli odlišná filozofická východiska, i jejich vlastní výstavba byla odlišná. V takto odlišných systémech přesto vznikají paradoxy, které, jak si ukážeme, mají k sobě mnohem blíže, než by se na první pohled mohlo zdát.

Dedekind představil svůj systém v roce 1888 ve svém spise *Was sind und was sollen die Zahlen?* (Dedekind, 1932), Frege o pět let později v *Grundgeseze der Arithmetik* (Frege, 1893). Oba spisy byly výsledkem snahy o naplnění ideje logicismu. Fregeho úporná snaha o naplnění logicistického programu je všeobecně známa; požadavek logického zdůvodňování vyslovuje i Dedekind, a to hned v úvodu svého spisu (Dedekind, 1932, s. 335):

> „Was beweisbar ist, soll in der Wissenschaft nicht ohne Beweis geglaubt werden. So einleuchtend diese Forderung erscheint, so ist sie doch, wie ich glaube, selbst bei der Begründung der einfachsten Wissenschaft, nämlich desjenigen Teiles der Logik,

Roztočilová, J. Paradoxy v systémech R. Dedekinda a G. Frega, *Pro-Fil*, vol. 15, no. 1 (2014). ISSN 1212-9097, s. 21–31. Dostupné online: http://www.phil.muni.cz/journals/index.php/profil/article/view/718.

welcher die Lehre von den Zahlen behandelt [...] noch keineswegs als erfüllt anzusehen“.

Ve svém spise chtěl Dedekind představit právě takový systém, v němž by všechny pravdy o číslech byly dokazatelné. Ale ačkoli Dedekind požaduje precizní výstavbu systému, prvky psychologismu lze najít hned v prvních pasážích, kdy definuje prvek množiny.[1] Tyto psychologistické prvky kritizuje mj. i Frege, který důsledně odmítal množinové pojetí matematiky, o něž se Dedekind opíral. Zatímco Dedekind na základě prvků tvoří množiny a pomocí teorie množin pak popisuje aritmetiku, pro Fregeho je pojem vůči svému rozsahu primární a teorii čísel buduje na zcela jiných základech (které bychom dnes mohli interpretovat jako predikátovou logiku druhého řádu).

1.1 Systém Richarda Dedekinda

Dedekindův aritmetický systém je vystavěn na teoreticko-množinovém základě, jehož pomocí zavádí přirozená čísla. Množinu přirozených čísel Dedekind vystavěl jako prostě nekonečnou množinu N, jejímž základním prvkem je prvek nazývaný 1 a která je uspořádána pomocí funkce následníka (níže viz α) tak, že 1 není následníkem žádného čísla (viz γ); funkce následníka je prostá (viz δ) a platí princip matematické indukce (viz β).

Ve spisu *Was sind und was sollen die Zahlen?* je velmi významný zejména odstavec č. 71 (Dedekind, 1932, s. 359), kde Dedekind charakterizuje prostě nekonečnou *množinu přirozených čísel N* pomocí (základního) prvku 1 a funkce φ z N do N, s následujícími podmínkami[2]:

(α) $\varphi(N) \subseteq N$. Tímto Dedekind říká, že následník přirozeného čísla je přirozené číslo.

(β) $N = 1_0$ (množina přirozených čísel N je průnikem všech řetězců, jejichž podmnožinou je základní prvek 1). Takto Dedekind vyjadřuje princip matematické indukce.

(γ) $1 \notin \varphi(N)$ (základní prvek 1 není obsažen v obrazu φ(N). To znamená, že základní prvek 1 není následníkem žádného přirozeného čísla.

(δ) Funkce φ je prostá. Tedy jestliže jsou následníci dvou přirozených čísel totožní, pak i tato čísla jsou totožná.

Nyní může Dedekind vystavět přirozená čísla. Nejprve podá důkaz, že každý nekonečný systém obsahuje prostě nekonečný systém[3]; poté ukáže, že jakékoli dva prostě nekonečné systémy jsou isomorfní; a pak, že stejné aritmetické pravdy platí pro všechna prostá nekonečna (tedy, co platí o jednom, může být díky isomorfismu přeloženo v odpovídající

[1] Podle Dedekinda může být prvkem množiny „jakýkoli předmět našeho myšlení“ viz Dedekind (1932, s. 344). Utváření množin je také závislé na našem myšlení: do množiny (systému) mohou být dány jakékoli prvky (věci), které můžeme z nějakého důvodu spojit v naší mysli.

[2] Tyto čtyři charakteristiky množiny přirozených čísel se proslavily jako Dedekindovy-Peanovy axiomy pro přirozená čísla.

[3] Systém N je prostě nekonečný, jestliže existuje prostá funkce $\varphi: N \rightarrow N$ tak, že N je řetězec prvku nazývaného 1 (který je z N a který není v obrazu φ(N)).

pravdu o jiném). Dále díky (jakémukoli) prostému nekonečnu „vytvoří“ objekty odpovídající jeho prvkům a tak zavede speciální prosté nekonečno, „přirozená čísla“.

1.2 Systém Gottloba Frega

Protože Frege odmítá pracovat s množinami (jelikož by do jeho systému vnesly prvky psychologismu), pracuje s průběhy hodnot funkcí a s rozsahy pojmů. Průběh hodnot funkce f: $\acute{\varepsilon}$ (f (ε)) chápe jako (logický) předmět, který je záznamem hodnot funkce f pro každý její argument. V případě, že funkcí je pojem F, nazývá Frege průběh hodnot této funkce F: εF rozsahem pojmu F (dnes jej nazýváme extenzí[4] pojmu F).

Pro axiomatickou výstavbu aritmetického systému využil Frege vlastní logický systém, který již dříve představil ve spisu Begriffschrift (Frege, 1879). Aby dokázal, že je veškerá matematika vyjádřitelná pomocí logického aparátu, zaměřil se na axiomy aritmetiky, jejichž převedením do logického systému by ukázal, že veškerou aritmetiku (a tudíž posléze i celou matematiku) lze vyjádřit pomocí logiky.

Základem Fregeho logické výstavby aritmetiky je definice nuly a funkce následníka; dále Frege definoval tzv. ancestrální relaci (relaci předchůdce) a dědičnost pojmu a s jejich pomocí mohl zavést tzv. slabý ancestral (*y je prvkem R-řady začínající x tehdy a jen tehdy, když předmět x předává dědičnou relaci R předmětu y nebo x = y*), a díky tomu již mohl definovat přirozená čísla jako prvky řady následníků začínající nulou: $NNx =_{\mathrm{df}} \mathbf{f}^{+} (x,0)$ (srov. Frege, 1893, s. 60).

V rámci Fregeho axiomatického systému, pokud je k němu přidán jako jeho jediný mimologický axiom tzv. Humův princip: $(\#F = \#G) \leftrightarrow (F \approx G)$[5], lze skutečně odvodit aritmetické axiomy:

1. Nula je přirozené číslo: $NN0$;
2. Nula není následníkem žádného přirozeného čísla: $\neg \exists x\, (NNx \wedge \mathbf{f}\,(0,x))$;
3. Žádná dvě přirozená čísla nemají stejného následníka: $\forall a\ \forall b\ \forall c\ [(\mathbf{f}\,(c, a) \wedge \mathbf{f}\,(c, b)) \rightarrow a = b]$;
4. Princip matematické indukce: jestliže něco platí pro nulu a zároveň z toho, že to platí pro nějaké přirozené číslo, plyne to, že to platí i pro jeho následníka, potom to platí pro jakékoli přirozené číslo: $[F0 \wedge \forall a\ \forall b\ (\boldsymbol{f}\,(b, a) \rightarrow (Fa \rightarrow Fb))] \rightarrow \forall x\ (NNx \rightarrow Fx)$;
5. Každé přirozené číslo má následníka: $\forall x\ [NNx \rightarrow \exists y\ (NNy \wedge \mathbf{f}^{-} (x, y))]$.

Tato formulace aritmetických axiomů a to, že ji Frege odvodil v rámci svého axiomatického systému, by mohlo být splněním jeho snu o výstavbě axiomatické teorie čísel - kdyby v jeho systému nenalezl B. Russell spor.

[4] „Extenze“ je termín zavedený až později R. Carnapem pro zpřesnění rozlišení smyslu a významu.

[5] „$\#\Phi$“ znamená „počet Φ“, „$\approx$“ je symbolem pro vzájemně jednoznačné zobrazení. Tento princip říká, že číslo přiřazené pojmu F je stejné jako číslo přiřazené pojmu G (či počet F je stejný jako počet G), tehdy a jen tehdy, když předměty spadající pod jeden pojem lze vzájemně jednoznačně přiřadit k předmětům spadajícím pod pojem druhý (bijektivní zobrazení).

Zde tedy bylo možné spatřit základní společné rysy i hlavní rozdíly mezi teoreticko-množinovým systémem R. Dedekinda a logickým systémem G. Frega. Společné rysy jsou dány stejným objektem zájmu, oba autoři popisují stejný systém, totiž systém přirozených čísel. Proto vidíme, že různým jazykem formulují stejné zákony a charakteristiky. Zásadní rozdíl mezi přístupem Dedekinda a Frega tkví v rozdílném názoru na to, jakým způsobem takový systém vybudovat.

2 Paradoxy v systémech R. Dedekinda a G. Frega

Jelikož jde o dva zcela rozdílné pohledy na týž problém, dalo by se předpokládat, že pokud se dostanou do obtíží, bude se jednat o specifické, vlastní obtíže, které by případně mohl řešit systém druhý (či třetí, ...). Proto je zajímavé se podívat na to, jaké problémy s sebou nese systém R. Dedekinda a porovnat je s problémy, které jsou spojeny s Fregeho systémem.

2.1 Paradoxy naivní teorie množin

Systém vybudovaný R. Dedekindem je, jakožto základ naivní teorie množin, náchylný k teoreticko-množinovým antinomiím, tedy k tzv. paradoxům naivní teorie množin. Jde zejména o paradox množiny všech ordinálních čísel, který publikoval Cesare Burali-Forti v roce 1897 (Burali-Forti, 1967). Tento paradox se týká tzv. „transfinitních ordinálních čísel“; transfinitní ordinální číslo je ordinální typ množiny svých předchůdců: ω je ordinálním typem $\{1, 2, 3, ...\}$; $\omega + 1$je ordinálním typem $\{1, 2, 3, ... \omega\}$; $\omega + 2$ je ordinálním typem $\{1, 2, 3, ... \omega, \omega+1\}$; atd. Tak i soubor všech transfinitních ordinálních čísel tvoří dobře uspořádanou množinu a té by mělo odpovídat (nové, další) ordinální číslo. Toto ordinální číslo by mělo být větší, než všechny prvky tohoto souboru. Zároveň ale – jakožto ordinální číslo – by mělo do této množiny spadat. Pro bližší vysvětlení odvození tohoto paradoxu (jak jej publikoval Burali-Forti) viz Historický exkurz I.

Podobná antinomie vyskytující se v naivní teorii množin se týká kardinálních čísel a nese název *Cantorův paradox* či *paradox kardinálních čísel*. K tomuto paradoxu vede tzv. Cantorův teorém: ke každé množině S existuje taková množina, která má větší mohutnost (kardinalitu); touto množinou je potenční množina $\wp(S)$. Formálně: $\wp(S) \succ S$. Nyní aplikujme Cantorův teorém na univerzální množinu (množinu všech množin) U. Jelikož je potenční množina $\wp(U)$ množinou (konkrétně množinou všech podmnožin množiny U), měla by být podmnožinou univerzální množiny U, a tedy, jakožto podmnožina množiny U má mít menší či stejnou mohutnost než U: $\wp(U) \preccurlyeq U$. Ale podle Cantorova teorému má mít potenční množina $\wp$ (S) větší mohutnost než množina S, tedy $\wp(U) \preccurlyeq U$. Tedy ($\wp(U) \preccurlyeq U \Leftrightarrow \wp(U) \succ U$), spor.

2.2 Russellův paradox

Roztočilová, J. Paradoxy v systémech R. Dedekinda a G. Frega, *Pro-Fil*, vol. 15, no. 1 (2014). ISSN 1212-9097, s. 21–31. Dostupné online: http://www.phil.muni.cz/journals/index.php/profil/article/view/718.

V rámci Fregova systému lze odvodit antinomii, která je všeobecně známa jako *Russellův paradox* [6] a o níž ukážeme, že zdaleka není nepodobná právě uvedeným paradoxům naivní teorie množin. Pro původní formulaci tohoto paradoxu viz Dodatek – Historický exkurz II. Pro náš záměr je užitečné formulovat Russellův paradox pomocí teoreticko-množinového aparátu, jak je dnes běžné: *Russellova množina* je množina všech množin, které nejsou prvkem sebe sama, tedy $R = \{x;\ x \notin x\}$. Snadno pak vidíme spor, když se zeptáme, zda je R prvkem sebe sama, tedy, zda $R \in R$. Jestliže platí, že $R \in R$, pak podle definice R platí $R \notin R$. Pokud $R \notin R$, pak z toho, že R není prvkem sebe sama a z definice množiny R plyne, že $R \in R$. Tedy $(R \in R \Leftrightarrow R \notin R)$, spor.

3 Společné rysy

Pokud postavíme tyto paradoxy vedle sebe, vidíme, že mají stejnou strukturu: Paradoxy naivní teorie množin jsou založeny na otázce, zda ordinální (resp. kardinální) číslo všech ordinálních (kardinálních) čísel patří do množiny všech ordinálních (kardinálních) čísel. Russellův paradox vyvstává, pokud se tážeme, zda množina všech množin, které nejsou prvkem sebe sama, je prvkem sebe sama. Zdá se tedy, že tyto tři paradoxy mají ve svých počátcích tento společný problém: systémy, v nichž se vyskytují, totiž neomezují, jaké prvky mohou či nemohou spadat do množiny; těmto systémům schází hierarchické uspořádání a nějaké zastřešení, které by těmto paradoxům předcházelo.

Tuto skutečnost si uvědomoval již Russell (1908), když to, co mají (nejen) uvedené paradoxy společné, popsal jako *autoreferenci* či *reflexivitu*. Proto představil svou teorii typů, která měla za cíl tuto sebevztažnost omezit[7]. Společné rysy těchto paradoxů lze vypozorovat i tak, že se podíváme na to, jakým způsobem je možné se jim vyvarovat. Vedle „Russellovského“ řešení pomocí typů, nalezneme ještě další možnosti řešení paradoxů naivní teorie množin, a to pomocí tzv. *vlastních tříd*. Vlastní třída obsahuje jako své prvky pouze množiny (nikoli vlastní třídy) a sama není množinou – tedy nemůže vyvstat otázka, zda je prvkem sebe sama. Soubor všech ordinálních čísel již nebude množinou, nýbrž vlastní třídou; v případě Cantorova paradoxu se univerzální množina nepřipustí jako množina, ale jako vlastní třída. A tedy souhrn všech množin, které nejsou prvkem sebe sama, je taktéž vlastní třídou a nikoli množinou a jelikož vlastní třída nemůže být prvkem vlastní třídy, tento souhrn nemůže být prvkem sebe sama.

Viděli jsme, že problém vzniká v momentech, kdy jsou uvažovány „velmi velké“ množiny a kdy se tyto množiny snažíme „nasoukat“ do představ, které máme o množinách menších. (Tato situace je poněkud úsměvná, uvědomíme-li si, že tyto systémy byly vytvořeny

[6] K tématu v českém jazyce viz zejména Kolman (2002) či Kolman (2008).
[7] Russell ve svém článku (1908, s. 222-223) uvádí vedle zde prezentovaných i další paradoxy, které mají podobné rysy, za všechny uveďme např. paradox lháře (*Epimenides*), který je nejstarší podobou takového paradoxu vůbec. Podle Russella je teorie typů společným řešením pro všechny paradoxy, které vznikají na základě autoreference. Naproti tomu Ramsey tyto paradoxy rozděluje do dvou skupin – námi zkoumané paradoxy označuje jako *logické paradoxy*, zatímco paradox lháře náleží do skupiny *sémantických paradoxů* (viz např. Cantini 2012). Ze současných autorů tezi, že zkoumané paradoxy mají pouze jediný zdroj, podporuje např. Graham Priest (1994).

pro snazší manipulaci s nekonečnem, ale i ony selhávají, pokud se setkají s nekonečnem, které je příliš veliké.) Problémy, do nichž se systémy R. Dedekinda a G. Frega dostaly, lze tedy chápat jako problém jediný a jeho různé podoby v jednotlivých systémech jako jeho pouhé instance. Tento problém by bylo možno chápat jako problém nehierarchizovanosti, jelikož řešení paradoxů z tohoto problému vznikajících tkví právě v hierarchizaci entit v daných teoriích (Russellova teorie typů hierarchizuje entity podle jejich typu a díky tomu se předchází jejich sebevztažnosti; řešení paradoxů naivní teorie množin pomocí postulování vlastních tříd je také jistou formou hierarchizace).

4 Závěr

Systém Richarda Dedekinda byl základem pro v tu dobu se utvářející naivní teorii množin. V souvislosti s tímto systémem jsme mluvili o tzv. paradoxech naivní teorie množin, a to konkrétně o paradoxu Burali-Fortiho a o Cantorově paradoxu. Fregeho pokus o axiomatickou výstavbu aritmetiky ztroskotal na Russellově paradoxu, který je (mezi filozofy) nejznámějším z moderních paradoxů.

Přes to (nebo možná spíše právě proto), že byly v obou systémech záhy po jejich vzniku objeveny antinomie, měly tyto systémy významný vliv na rozvoj moderní logiky a matematiky. Konkrétněji, Fregeho dílo se stalo základem pro moderní logiku a Dedekindovo pro naivní teorii množin, která pak vedla k vytvoření axiomatické teorie množin. Kromě těchto bezprostředních vlivů měli ovšem tito autoři a jejich nekonzistentní systémy i vliv nepřímý: paradoxy vyskytující se v těchto systémech podnítily pokusy o jejich odstranění a díky tomu bylo v dané oblasti vytvořeno mnoho kreativních koncepcí. Ve snaze o eliminaci sporu vyskytujícího se ve Fregeho neúspěšném systému (1893) vytvořil B. Russell teorii typů (1908), a díky paradoxům naivní teorie množin byla vytvořena řada bezesporných axiomatických teorií množin (za Dedekindova následníka můžeme označit například E. Zermela a v této souvislosti zmínit všeobecně přijímanou Zermelo-Fraenkelovu teorii množin).

Ačkoliv byly tyto systémy zbudovány se stejným cílem (formálně vystavět teorii čísel), jejich vlastní realizace byla odlišná. A ačkoli byly způsoby výstavby těchto teorií odlišné, vyskytly se v nich paradoxy, které, jak jsme ukázali, mají mnoho společného. Dokonce tolik společného, že je namístě tyto paradoxy považovat za vznikající na stejném principu, který jsme na základě shodných rysů daných paradoxů a také jejich řešení označili jako problém nehierarchizovanosti.

5 Dodatek

5.1 Historický exkurz I: odvození paradoxu ordinálních čísel

Z celé řady moderních paradoxů byl paradox ordinálních čísel prvním, který byl kdy publikován (Burali-Forti, 1967). V části tohoto článku, která pojednávala o paradoxech naivní teorie množin, byl tento paradox představen jen stručně. Jelikož je tento článek určen (zejména) zájemcům o paradoxy, na následujících řádcích si ukážeme, jakým způsobem byl poprvé v dějinách formulován moderní paradox.

Paradox ordinálních čísel byl původně formulován pro dokonale uspořádané množiny („classe perfettamente ordinata“, v angličtině je používáno označení „perfectly ordered set“) ordinálních čísel. Pojem dokonale uspořádané množiny zavedl Burali-Forti proto, že mu nevyhovovala Cantorova definice dobře uspořádané množiny[8]. Později Burali-Forti zjistil, že při zkoumání této definice přehlédl část této definice (bod (c) definice uvedené v poznámce)a to byl důvod, proč považoval tuto definici za příliš slabou a proč zaváděl nový termín dokonale uspořádané množiny. Správně definované dobře uspořádané množiny jsou ovšem také dokonale uspořádané, ale nikoli obráceně. Proto, ačkoli původní formulace tohoto paradoxu byla prezentována pro dokonale uspořádané množiny ordinálních čísel, lze tento paradox převést také na dobře uspořádané množiny ordinálních čísel. Ačkoli je dnes tento paradox uváděn v souvislosti s dobře uspořádanými množinami, na následujících řádcích se budeme držet původní podoby formulace tohoto paradoxu. Stručně ukážeme, jak k tomuto paradoxu Burali-Forti dospěl[9].

Množinu u, která je uspořádaná pomocí relace h označme (u, h). Dokonale uspořádaná množina je pak definována takto:

(a) existuje prvek $x \in u$, který je nejmenší vzhledem k uspořádání h;

(b) každý prvek $x \in u$, který má následníka, má přímého následníka;

(c´) pro jakýkoli prvek $x \in u$ platí, že

(i) buďto x nemá přímého předchůdce;

(ii) nebo existuje prvek y, který je předchůdcem prvku x, takový že y nemá přímého předchůdce a je pouze konečně mnoho takových prvků $z \in u$, které jsou následníkem y a zároveň předchůdcem x.

Ordinální typ prvků dokonale uspořádané množiny (u, h) značíme T‘(u, h). Jedná se o funkci, která množině (u, h) přiřadí stejný prvek, jako jakékoli dokonale uspořádané množině, která je s ní ekvivalentní. To znamená, že pokud (u, h) a (v, k) jsou dokonale uspořádané množiny, potom mají stejný ordinální typ tehdy (a jen tehdy), jestliže jsou ekvivalentní, tedy T‘(u, h) = T‘$(v, k) \Leftrightarrow (u, h) \wr (v, k)$.

Nechť (u, h) a (v, k) jsou dokonale uspořádané množiny. Pak T‘(u, h) je menší, než T‘(v, k), značíme T‘(u, h) < T‘(v, k) či T‘(v, k) > T‘(u, h), jestliže existuje $v_1 \subseteq v$ taková, že (u, h) je ekvivalentní (v_1, k) a zároveň neexistuje $u_1 \subseteq u$ taková, že by (u_1, h) a (v, k) byly ekvivalentní. Platí: (1) $(a = b) \wedge (a < b) \leftrightarrow \perp$;

(2) $(a < b) \wedge (a > b) \leftrightarrow \perp$.

[8] Dobře uspořádanou množinu u můžeme definovat takto (dle Burali-Forti (1967)):
(a) v množině u existuje nejmenší prvek;
(b) každý prvek $x \in u$, který má následníka, má přímého následníka;
(c) Jestliže je $u_1 \subseteq u$ taková, že existují prvky $x \in u$ takové, které jsou větší, než prvky $y \in u_1$, potom existuje prvek $a \in u$ takový, že neexistuje žádný prvek menší než a a větší než jakýkoli prvek u_1.

[9] Následující pasáž dle a pro přesné znění viz Burali-Forti (1967, s. 104 - 112).

Nyní již můžeme formulovat tvrzení (A), o němž, sledujíce Burali-Fortiho postup, ukážeme, že z něj plyne spor: (A) $(a, b \in \mathrm{T}) \rightarrow ((a = b) \vee (a < b) \vee (a > b))$,

kde $\mathrm{T} = \{x \mid x = \mathrm{T}`(u, h); (u, h) \text{ je uspořádaná}\}$.

Ordinální číslo (značíme No) je ordinálním typem dokonale uspořádané množiny. Jelikož je tato množina dokonale uspořádána (pomocí relace ∈>), existuje takové ordinální číslo Ω, které je jejím ordinálním typem, čili $\Omega = \mathrm{T}`(\mathrm{No}, \in>)$. Jelikož je toto číslo ordinálním číslem, je prvkem množiny ordinálních čísel, tedy $\Omega \in \mathrm{No}$.

Z tvrzení (A) lze odvodit, že jestliže $(u, h) < (v, k)$ (a jsou-li (u, h), (v, k) uspořádané množiny), pak platí, že $\mathrm{T}`(u, h) \leq \mathrm{T}`(v, k)$. Z toho plyne, že pro každé ordinální číslo $a \in \mathrm{No}$ platí $a \leq \Omega$.

Zároveň pro každé $a \in \mathrm{No}$ platí, že $a + 1 > a$.

Dosazením Ω za a do $a + 1 > a$ získáme $\Omega + 1 > \Omega$; dosazením Ω+1 za a do $a \leq \Omega$ získáme $\Omega+1 \leq \Omega$. Čili $\Omega + 1 > \Omega$ a zároveň $\Omega+1 \leq \Omega$, což je (podle (1) a (2)) spor.

To znamená, že nemůže platit (A), a proto musí existovat alespoň dvě ordinální čísla a a b taková, že $a \neq b$, $a \nless b$ a $a \ngtr b$.

Paradox ordinálních čísel tedy Burali-Forti formuloval tak, že z tvrzení, že jakákoli transfinitní ordinální čísla (čili jakékoli ordinální typy) jsou si buďto rovna, nebo je jedno z nich větší nebo menší než druhé, odvodil spor. Jelikož toto tvrzení vedlo ke sporu, Burali-Forti usoudil, že existují ordinální typy a a b takové, že $a \neq b$, $a \nless b$ a $a \ngtr b$. To jej vedlo k tomu, že uspořádání na množině ordinálních čísel je (pouze) částečným uspořádáním (a nikoli lineárním, jak tvrdí Cantor). Burali-Fortiho řešení ovšem nebylo následováno, paradox byl později odstraněn tím, že soubor všech ordinálních čísel nebyl považován za množinu, nýbrž vlastní třídu.

5.2 Historický exkurz II: Odvození Russelova paradoxu

Russellův paradox lze v rámci Fregeho systému odvodit spor (známým) způsobem, o němž napsal Russell v dopise Fregovi. Tento paradox vzniká na základě Fregeho 5. axiomu, který říká, že extenze dvou pojmů F a G jsou stejné, tehdy a jen tehdy, když všechny předměty spadající pod pojem F, spadají také pod předmět G a naopak.

V rámci Fregeho systému lze zformulovat pojem *„být předmětem x, který je extenzí pojmu, pod nějž předmět x nespadá“*, tedy v moderní podobě je to výraz $[\lambda x\, \exists F\, ((x = \varepsilon F)\ \&\ \neg Fx)]$.[10] Je-li takovýmto pojmem P, existuje extenze εP. (Díky principu, který lze ve Fregově systému odvodit a podle nějž má každý pojem svou extenzi.) Nyní, kvůli 5. axiomu, vyvstane antinomie při otázce, *zda extenze pojmu P spadá pod pojem P.*

Pro původní podobu (ovšem v anglickém překladu) nahlédneme do Russellova dopisu Fregovi (Russell, 1967):

> „ Let *w* be the predicate: to be a predicate that cannot be predicated of itself. Can *w* be predicated of itself? From each answer its opposite follows. Therefore we must

[10] Díky principu komprehenze, který je ve Fregeho systému odvoditelný, víme, že takovýto pojem existuje.

conclude that *w* is not a predicate. Likewise there is no class (as a totality) of those classes which, each taken as a totality, do not belong to themselves. From this I conclude that under certain circumstances a definable collection does not form a totality."

Ve svém dopise Russell uvádí také formální vyjádření tohoto sporu pomocí Peanovy notace:

$$w = \mathrm{cls} \cap x \ni (x \sim \in x) \,.\, \supset : w \in w \,.\, = . \, w \sim \in w,$$

což lze dnešní notací zapsat takto: $(w = \{x \mid x \notin x\}) \rightarrow ((w \in w) \leftrightarrow (w \notin w))$.

Fregeho vlastní odvození tohoto sporu nalezneme v dodatku ke druhému dílu Grundgesetze (Frege, 1903, s. 253 – 265). Zde ukazuje, že v rámci jeho systému lze odvodit následující tvrzení: $\neg\forall g\, ((\acute{\varepsilon}(g(\varepsilon)) = \mathrm{A}) \rightarrow g(\mathrm{A})) \leftrightarrow \forall g\, ((\acute{\varepsilon}(g(\varepsilon)) = \mathrm{A}) \rightarrow g(\mathrm{A}))$.[11]

(Ve Fregeho notaci „$\acute{\varepsilon}(g(\varepsilon))$" znamená „průběh hodnot funkce *g*" a jde vlastně o „výpis" hodnot funkce pro každý argument.[12] „A" je zde zkratkou za „$\acute{\varepsilon}(\neg\forall g\, ((\acute{\varepsilon}(g(\varepsilon)) = \varepsilon) \rightarrow g(\varepsilon))$" a Frege tak označuje třídu všech tříd, které samy sobě nenáleží.) Řečeno slovy: třída všech sobě nenáležejících tříd si náleží právě tehdy, když si nenáleží. A to je spor.

Frege se tuto kontradikci pokoušel odstranit, ale neuspěl. Dnes již existuje celá řada různých řešení tohoto paradoxu, z nichž nejznámější cesty zachování Fregeho aritmetického systému tak, aby byl konzistentní, jsou dvě: cesta oslabení axiomu V. a cesta omezení komprehenzního schématu, který je z něj odvoditelný. Vůbec nejznámější je ovšem Russellovo „řešení", které ovšem Fregův systém nezachovává, a to Russellova teorie typů, kde se díky hierarchickému uspořádání entit nemůžeme do podobného problému vůbec dostat.

Literatura

Burali-Forti, C. (1967): A question on transfinite numbers. In: Heijenoort, J. (ed.): *From Frege to Gödel*. Cambridge, Masachusetts: Harvard University Press, 104 – 112. Dostupné na:
<http://books.google.cz/books?id=v4tBTBlU05sC&printsec=frontcover&hl=cs&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false>

Cantini, A. (2012): Paradoxes and Contemporary Logic. In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2012 Edition)* [online]. Stanford: The Metaphysics Research Lab, 2012, last modified on 27. 11. 2012 [cit. 15. 6. 2014]. Dostupné na:
<http://plato.stanford.edu/archives/win2012/entries/paradoxes-contemporary-logic/>.

Cantor, G. (1967): Letter to Dedekind. In: Heijenoort, J. (ed.): *From Frege to Gödel*. Cambridge, Masachusetts: Harvard University Press, 113 – 117. Dostupné na:
<http://books.google.cz/books?id=v4tBTBlU05sC&printsec=frontcover&hl=cs&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false>

---

[11] Fregeho zápis byl z pochopitelných důvodů převeden na lineární, ale způsob formulace byl zachován.

[12] Frege považoval průběh hodnot funkce za předmět. Zpředmětnění průběhu hodnot vede k tomu, že sám průběh hodnot může být argumentem pro jakoukoli funkci, a tedy i pro tu, jejímž záznamem hodnot je.

Roztočilová, J. Paradoxy v systémech R. Dedekinda a G. Frega, *Pro-Fil*, vol. 15, no. 1 (2014). ISSN 1212-9097, s. 21–31. Dostupné online: http://www.phil.muni.cz/journals/index.php/profil/article/view/718.

Dedekind, R. (1932): Was sind und was sollen die Zahlen? In: Fricke, R., Noether, E., Ore Ö. (eds.): *Richard Dedekind Gesammelte mathematische Werke.* Braunschweig: Friedrich Viewegh und Sohn, 335 – 391. Dostupné na: <https://archive.org/stream/wassindundwasso00dedegoog#page/n22/mode/2up>

Frege, G. (1879): *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Halle a. S.: Louis Nebert. Dostupné na: <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k65658c>

Frege, G. (1893): *Grundgesetze der Arithmetik.* Jena: Verlag von Hermann Pohle. . Dostupné na: <http://www.korpora.org/Frege/>

Frege, G. (1903): *Grundgesetze der Arithmetik; Bd. 2.* Jena: Verlag von Hermann Pohle. . Dostupné na: http://www.korpora.org/Frege/

Gillies, D. (1982): *Frege, Dedekind and Peano on the foundations of Arithmetic.* Assen: Van Gorcum. Dostupné na: <http://www.thatmarcusfamily.org/philosophy/Course_Websites/Readings/Gillies%20-%20Frege%20Dedekind%20and%20Peano.pdf>

Kneale, W., Kneale, M. (1962): *The Development of Logic.* Oxford: Oxford University Press. Dostupné na: <http://books.google.cz/books?id=FtXAwgy1w9cC&printsec=frontcover&hl=cs#v=onepage&q&f=false>

Kolman, V. (2002): *Logika Gottloba Frega*. Praha: Filosofia. Dostupné na: <http://dec59.ruk.cuni.cz/~kolmanv/>

Kolman, V. (2008): *Filosofie čísla.* Praha: Filosofia. Dostupné na: <http://dec59.ruk.cuni.cz/~kolmanv/>

Priest, G. (1994): The Struture of the Paradoxes of Self-Reference. In: *Mind,* New Series, Vol. 103, No. 409, 25-34. Dostupné na: <http://www.jstor.org/discover/10.2307/2253956?uid=2134&uid=2&uid=70&uid=4&sid=21104336576413>.

Russell, B. (1908): Mathematical Logic as Based on the Theory of Types. In: *American Journal of Mathematics*, Vol. 30, No. 3 (Jul., 1908), 222-262. Dostupné na: <http://www.cfh.ufsc.br/~dkrause/pg/cursos/selecaoartigos/Russell(1905).pdf>

Russell, B. (1967): Letter to Frege. In: Heijenoort, J. (ed.): *From Frege to Gödel*. Cambridge, Masachusetts: Harvard University Press, 126 – 127. Dostupné na: <http://books.google.cz/books?id=v4tBTBlU05sC&printsec=frontcover&hl=cs&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false>.

Roztočilová, J. Paradoxy v systémech R. Dedekinda a G. Frega, *Pro-Fil*, vol. 15, no. 1 (2014). ISSN 1212-9097, s. 21–31. Dostupné online: http://www.phil.muni.cz/journals/index.php/profil/article/view/718.