Pro-Fil 22 (1) 2021: 53–55
https://doi.org/10.5817/pf21-1-2270

LUCA INCURVATI, *CONCEPTIONS OF SET AND THE FOUNDATIONS OF MATHEMATICS*

Cambridge University Press, 2020, 238 s.

JAN ŠTĚPÁNEK

Katedra filozofie FF MU, Brno, Česká republika, 380011@mail.muni.cz

RECENZE

Knih o filozofii matematiky nevychází mnoho. Když už tedy nějaká nová vznikne, rozhodně stojí za pozornost. Na začátku minulého roku jedna taková vzešla z pera italského filozofa Luca Incurvatiho a nese název *Conceptions of Set and the Foundations of Mathematics*. Luca Incurvati aktuálně působí na University of Amsterdam a dlouhodobě se zabývá filozofií matematiky, logiky, jazyka a metaetikou. Díky propojení těchto disciplín nedávno dokonce získal prestižní ERC grant na výzkum role negace v každodenním jazyce.

Věnujme však pozornost jeho knize o základech matematiky. Jestli si v současnosti nelze bez něčeho dost dobře matematiku představit, pak jsou to množiny. Je to více než 140 let, co se začaly zabydlovat v jazyce, kterým matematici běžně hovoří. Množiny se dokonce krátce po svém vzniku staly základní stavební jednotkou, ze které je celá budova matematiky sestavena. Staly se součástí axiomatického systému, z něhož se dále odvozují všechny teorémy. Této role se ujaly tak obratně, že přestože jsou základním matematickým pojmem, většina lidí je pokládá za okrajovou část matematiky, s níž se setkali až někde na střední škole. Ve skutečnosti je přitom naprosto každý matematický objekt v konečném důsledku množinou. Kružnice je množinou těch bodů v rovině, které se nacházející v konstantní vzdálenosti od středu; číslo 3 se definuje jako tříprvková množina $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$; operace sčítání je speciálním typem zobrazení, které je zase jen množinou uspořádaných sčítanců a výsledného součtu.

První formální systém vybudovaný na množinách předložil Georg Cantor v roce 1874 a o několik desetiletí později shrnul význam jeho teorie pro matematiku David Hilbert: „Nikdo nás nemůže vyhnat z ráje, který nám vytvořil Cantor.“ Množiny byly původně chápány jako soubory prvků mající nějakou společnou vlastnost, přičemž na charakter této vlastnosti se nekladla žádná omezení. Zápis $\{x: x\ je\ člověk\}$ by označoval množinu všech lidí a $\{x: x \notin x\}$ zase množinu všech množin, které neobsahují samy sebe jako prvek. Takové svobodomyslné konstruování množin však vedlo k neblahým důsledkům a kontradikcím. Russellův paradox např. ukazuje, že u posledního výše uvedeného příkladu není možné určit, zda $\{x: x \notin x\}$ sama sebe obsahuje, či nikoliv, což je spor. O Cantorovu systému se později začalo mluvit jako o naivní teorii množin. Ne snad proto, že by to byl přístup hloupý, ale proto, že byl založený na až příliš jednoduchém pojmu náležení prvku do množiny. Řešením se nakonec stal axiomatický systém teorie množin ZFC, který se podobným sporům úspěšně vyhýbá.

Jednou věcí je to, jak množiny v matematice fungují, druhou pak to, jak jim rozumíme. A je to právě pojetí (conception) množin, co je podle Incurvatiho zcela zásadní pro úspěšnost matematických teorií. Oproti původní cantorovské představě množin jako souboru prvků založených na společné vlastnosti předkládá Incurvati pojetí *iterativní*. Podle tohoto schématu se množiny dělí do nekonečně mnoha úrovní. Řekněme, že na první úrovni stojí třeba prázdná množina $V_0 = \emptyset$. Potom $V_1 = \{\emptyset\}$ je potenční množina množiny V_0, $V_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ je potenční množina množiny V_1 atd. až obecně $V_n = \mathcal{P}(V_{n-1})$. Množina první úrovně zdaleka nemusí být prázdná. Může se jednat o množinu všech žijících filozofů nebo o množinu všech klobouků. Důležité je to, že množiny vyšších úrovní jsou produktem množiny nacházejících se o úroveň níže. Neformálně lze říci, že množina libovolné úrovně může obsahovat jen ty prvky, které jsou obsaženy v potenční množině množiny, která se nachází na úrovni o jedničku menší. Přijetí iterativního chápání množin může být lákavé proto, že se jednak zakládá na axiomech ZFC a jednak nedovoluje formulovat Russellův paradox stojící na autoreferenci. Pro iterativní množiny není možné, aby některá z nich obsahovala sama sebe jako svůj vlastní prvek.

Iterativnímu pojetí bývalo často vytýkáno, že zakládá existenci množin na existenci objektů, které jsou jejími prvky. Z této metafyzické závislosti pak plynou některé nejasnosti. Je-li Sokrates prvkem jednoprvkové množiny S, pak by zjevně existence S závisela na Sokratovi. Platí to ale i naopak? Závisí Sokratova existence na existenci množiny S? A co když se ukáže, že žádný Sokrates ve skutečnosti nikdy neexistoval? A jaký mají množiny ontologický status, jestliže jsou závislé na reálných objektech? Zdá se, že tyto problémy nejlépe řeší tzv. minimalistický popis iterativního pojetí množin. Tomu je možné rozumět tak, že „neklade žádné požadavky na metafyziku množin, nýbrž pouze na strukturu systému, který z nich vzniká.“ (s. 69) Hlavním Incurvatiho argumentem je přitom to, že žádné jiné pojetí množin nevyhovuje současné matematice a neodolává všemožným paradoxům lépe než právě to minimalistické.

Předně je ale nutné odrazit některé tradiční námitky vůči iterativnímu chápání množin. Podle jedné nastává problém v momentě, kdy se iterativní pojetí snaží nahradit pojetí naivní. Aby náhrada proběhla úspěšně, měl by Incurvatiho popis zachovat to dobré z naivní teorie množin a zbavit se jen toho problematického. Není ale zcela jasné, jak by iterativní pojetí množin mohlo převzít schopnost množin absorbovat libovolnou vlastnost společnou určitým prvkům a z nich poté vytvořit množinu. Jedná se o tzv. naivní axiom vydělení, podle něhož každá podmínka či kritérium vyjádřitelné v jazyce teorie množin určuje nějakou množinu. Další nesnáz lze spatřit v samotném postulování hierarchicky uspořádaných množin, neboť toto uspořádání již předpokládá pojem ordinálních čísel. Ten ale přitom z iterativního pojetí množin získáme až po jejich postulování. Zdá se tedy, jako by do hry stále vstupovalo naivní chápání množin a dodávalo ordinální čísla. Poslední významná námitka, s níž se čtenář setká ve 3. kapitole, se týká sémantiky teorie množin. K jejímu definování je potřeba lokalizovat univerzum, tj. prostor všech množin. To se ale u iterativního pojetí nezdá být dost dobře možné, protože stále mohou existovat množiny vyšších a vyšších úrovní.

Protože se Incurvatimu podařilo všechny tyto námitky vyvrátit a protože je iterativní pojetí množin vyhovujícím přístupem, který splňuje axiomy ZFC, vyhýbá se paradoxům a neobsahuje vnitřní spor, můžeme říci, že se jedná o legitimní pojetí, na němž lze teorii množin postavit. Aby se však rovněž jednalo o preferované pojetí, musí Incurvati ukázat, že všechny ostatní návrhy v nějakém ohledu zaostávají. Ve 4. kapitole proto zvažuje návrhy stoupenců naivní teorie množin, kteří nespatřují chybu v tom, jak množiny chápeme, nýbrž v tom, s jakou logikou pracujeme. Russellovu paradoxu se můžeme zbavit např. tím, že položíme celou teorii množin na základě některé parakonzistentní logiky, jejichž významnou vlastností je to, že ne všechny kontradikce vedou ke sporu. Incurvati však ukazuje, že každý z těchto přístupů s sebou přináší těžkosti. Nejčastěji toho druhu, že je daná logika příliš slabá, či naopak příliš silná co do počtu odvoditelných teorémů.

V následujících dvou kapitolách se Incurvati věnuje snahám o zrevidování klasického pojetí množin založeného na nějaké konkrétní vlastnosti. Předkládá dvě pojetí: syntaktické a sémantické. Vyvarovat se paradoxům podobným tomu Russellovu můžeme i tak, že si ponecháme onu starou dobrou klasickou logiku a naopak zakážeme některým vlastnostem, aby zakládaly množiny. Omezením právě těch – podle Incurvatiho vlastních slov – patologických vlastností však nedosáhneme skutečného řešení, nýbrž pouze *ad hoc* úpravy naivního axiomu vydělení, který přesto dál tvoří nekonzistentní teorii. Podobně dopadne i návrh založený na Cantorově poznámce, že by měly být odmítnuty právě ty vlastnosti, které dávají vzniknout až příliš velkým množinám. A nezáleží přitom, zda oním adjektivem „příliš velký" rozumíme velikost srovnatelnou s ordinálními čísly, nebo číslo odpovídající mohutnosti celého univerza, tj. kardinality množiny $\{x : x = x\}$. Všechna velikostní omezení nakonec selhávají na společném předpokladu pojmů nutných k jejich formulování, na něž ještě nelze omezení uplatnit a která tak i nadále vedou ke sporům.

Přes veškeré odmítání konkurenčních pojetí a přístupů nachází Incurvati jednu životaschopnou a vnitřně bezespornou alternativu k iterativní koncepci množin. Významnou pomůckou při práci s množinami je grafické znázornění. Ukazuje se však, že grafy mohou hrát mnohem důležitější roli, tj. že na nich lze množiny založit tak, že jakýkoliv graf zobrazuje nějakou množinu. Takto chápané množiny pak dokonce splňují axiomy ZFC a díky jejich propojení s existencí praktického nákresu nepodléhají antinomiím. I přes svébytnou konstrukci však nemůže grafické pojetí konkurovat iterativnímu, které je založené na formálním jazyce a stává se tak nejvhodnější koncepcí pro teorii množin, a tím i pro základy veškeré matematiky.

Literatura

Incurvati, L. (2020): *Conceptions of Set and the Foundations of Mathematics*, Cambridge University Press.